ŠESTEROKUT

SVIBANJ 2020.

SADRŽAJ

PRIJE NO ŠTO POČNETE

U ovoj knjižici se nalaze zadaci prvog Šesterokuta. Šesterokut je petodnevno natjecanje iz fizike i matematike za učenike srednjih škola. Natjecanje traje od 12. do 17. svibnja 2020.

Svoja rješenja i pristup argumentirajte što detaljnije, nemojte štediti na riječima. Ako izradite neki program, pošaljite kod (koji je također iskomentiran). Vaša rješenja i vaš uradak koji pošaljete u potpunosti predstavlju rad vašeg tima, te ukoliko je nejasno što želite reći, nećemo moći adekvatno to bodovati. Pišite razumljivo i čitko!

Pravila natjecanja su sljedeća:

- Natjecanje traje 5 dana, odnosno 120h, sva rješenja predana izvan tog roka neće biti priznata
- Timove je potrebno prijaviti putem formulara koji je dostupan na sesterokut.com. Rok za prijavu je 17.5.
- Moguće je raditi u timovima od maksimalno tri osobe.
- Ukoliko koristite neke rezultate koje ste pronašli u literaturi, zapišite reference.

Naglašavamo posljednju točku, citirajte svoje izvore ukoliko ih koristite.

Rješenja se predaju u PDF formatu, odvojeno fizika i matematika, slanjem na rjesenja@sesterokut.com. Molimo da navedete samo naziv svog tima na papirima te da naglasite o kojem se zadatku radi (primjer ovdje). Ukoliko je fotografija ili scan nejasan, nećemo dodijeliti bodove.

Ukoliko imate pitanja vezana uz zadatke ili mislite da postoji greška, možete se javiti na fizika@sesterokut.com ili matematika@sesterokut.com.

Također, ovim putem bih se htio zahvaliti svim sastavljačim na njihovom trudu u pripremanju ovih zadataka kao i pomoći u organizaciji cijelog natjecanja za koje se nadam da neće biti zadnje. *Filip Novkoski*

Sretno!

Part I

Fizika

TENSEGRITY

Autor: *Matej Pavlović*

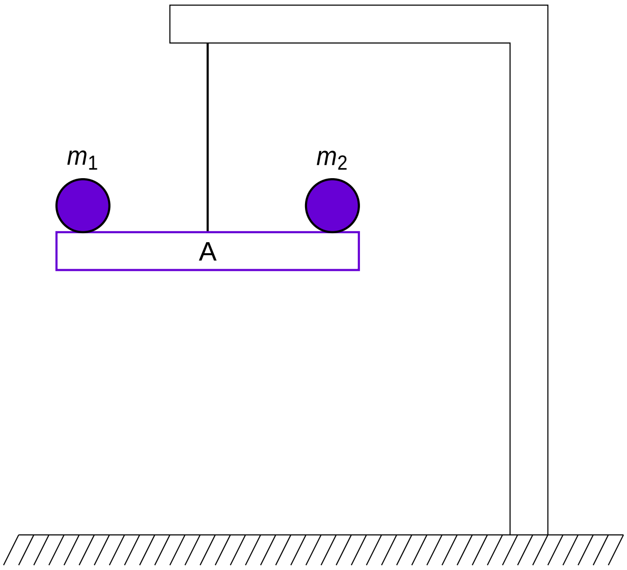
U ovom zadatku ćemo pokušati razumjeti fiziku iza tensegrity (tension and integrity) struktura. Primjer jedne takve je dan na slici 1. Iako se na prvi pogled čini kontraintuitivno i fizikalno nemoguće, nakon razmatranja stvar postaje puno jasnija.

Slika 1: Primjer tensegrity strukture. Photo credit JK Extras

Zadatak 1 Krenimo od jednostavnog 2D slučaja prikaznog za slici 2. Tijelo A je pričvršćeno s niti na potporu, nit je učvršćena u sredini tijela A. Na rubovima tijela A se nalaze dvije male kuglice masa m_1 i m_2, kuglice su jednako udaljene od niti. Odredite uvjet koji trebaju zadovoljiti mase m_1 i m_2 kako bi tijelo A mirovalo u položaju danom na slici. Nakon što odredite uvjet odredite i centar mase sustava (tijelo A i obje kuglice).

Zadatak 2 Sada na postavu sastavimo tijelo koje se sastoji od 3 tijela (A,B,C) koja su čvrsto povezana (spojevi se ne mogu odvojiti ni rotirati). Tijelo B je bez mase i služi samo kao čvrsta poveznica između tijela A i C. Tijela A i C imaju mase m_A i m_C te su njihove duljine dane iznosima l_A i l_C. Odredite udaljenost x sa slike na kojoj će sustav (A,B,C) stajati kao što je prikazano na slici. Komentirajte kako bi sustav pao (prema lijevo ili prema desno) u slučaju da je x veći od udaljenosti koju ste odredili. Na temelju čega ste odredili smjer pada?

Zadatak 2.1 Odredite x u slučaju da je nit učvršćena na desnom rubu tijela A, pretpostavite da su tijela A i C beskonačno tanka, tj. da ih prikazujemo pomoću crte a ne pravokutnika.

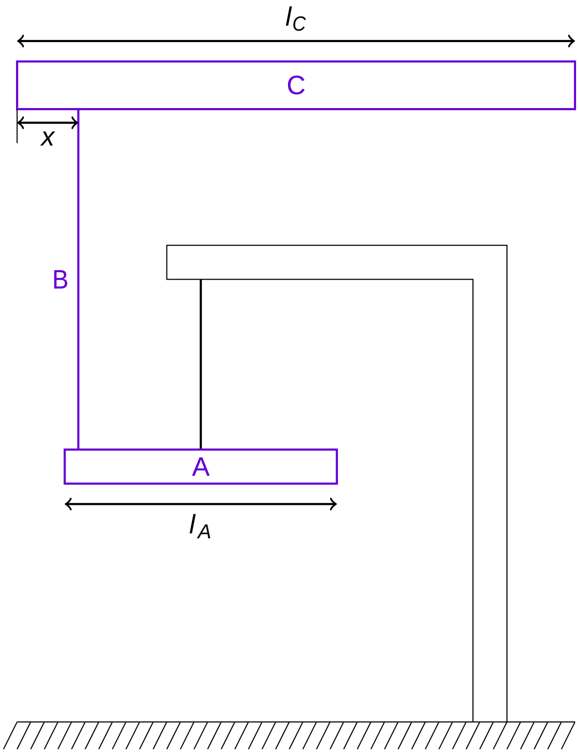


Slika 2:

Zadatak 3 Kao što postoji Newtonov zakon za translaciju tako i postoji zakon za rotaciju, te je dan sljedećim izrazom:

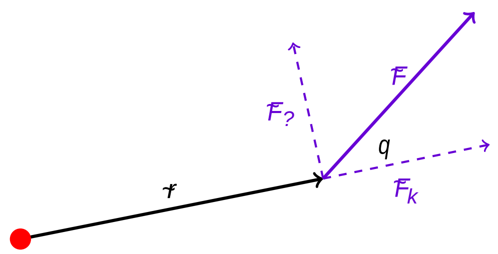
$$M = r \quad F \quad sin(q), \tag{1}$$

gdje je r udaljenost od točke rotacije do uporišta sile, F je iznos te sile, a kut q je kut koji zatvara vektor sile s vektorom r (slika 4).



Slika 3:

Iznos momenta ima predznak + ako rotira tijelo suprotno od kazaljke na satu ili predznak - ako ga rotira u smjeru kazaljke na satu. Kako se tijelo ne bi rotiralo suma svih momenata mora biti 0. Sustav je prikazan na slici 5, dodali smo desnu nit koja povezuje tijelo C i tlo, dimenzije d_A i d_C možemo zanemariti (iznos im je 0). Masu dijela B više ne zanemarujemo nego ima iznos m_B.



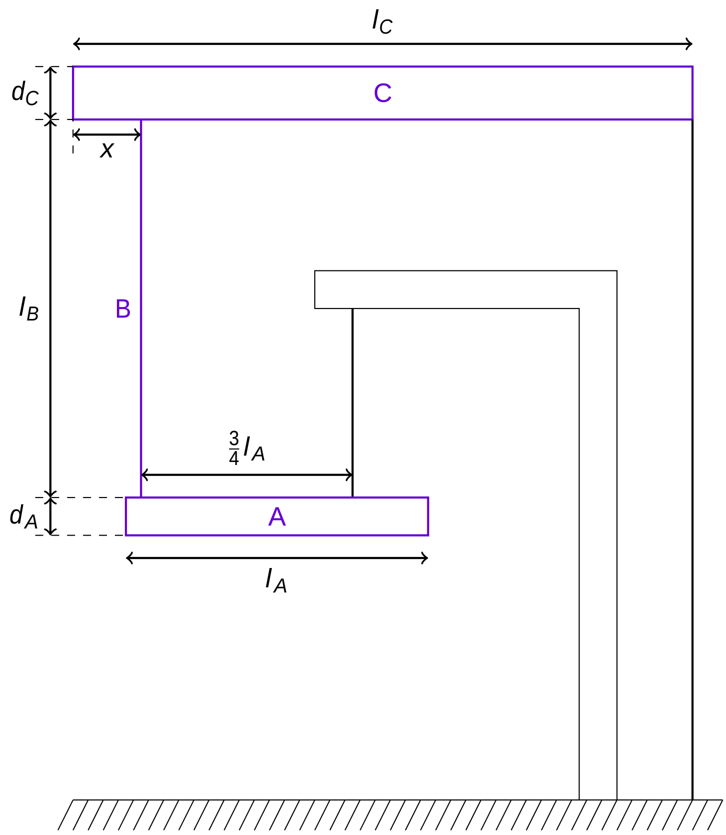
Slika 4:

Zadatak 3.1 Označite os rotacije sustava (tijelo koje čine tijela A, B i C), te skicirajte sve sile i njihova uporišta.

Zadatak 3.2 Odredite x tako da napetost desne niti bude jednaka 0.

Zadatak 3.3 Odredite napetost desne niti kao funkciju varijable x te skicirajte dobivenu funkciju. Koristite $m_A = 2m_B = 0.5m_C = 1\text{kg}$, $l_A = 0.5l_B = l_C/3 = 1$ m, $g = 10$ m/s^2. Možete pretpostaviti da obje niti uvijek stoje okomito na tlo.

Zadatak 3.4 Kolika je maksimalna vrijednost x-a ako desna nit puca pri sili od 15 N?



Slika 5:

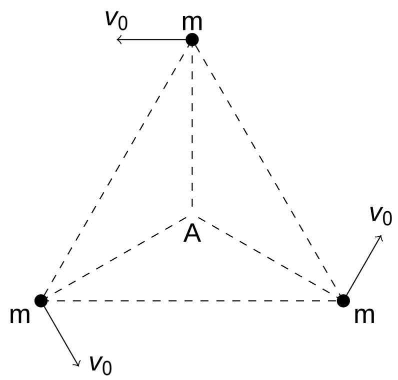
Dodatna pojašnjenja:
Kuglice promatramo kao točkaste mase, debljine tijela A, B i C su zanemarive.
Kod određivanja centra mase ishodište koordinatnog sustava je dano vama na izbor.
Spoj tijela A i B je na rubu tijela A, tj. udaljenost spoja od lijevog ruba tijela A je 0.
Sva tijela imaju homogen raspored mase.

SUPERNOVA

Autor: Domagoj Perković

Tijekom svog životnog vijeka, zvijezde koriste sudare atoma vodika i helija kako bi generirale svjetlost. Međutim, nakon što potroše te materijale, zvijezde se urušavaju pod utjecajem vlastite gravitacije. Nakon toga postaju supernove. U ovom zadatku ćemo koristiti jednostavan gravitacijski model kako bismo procijenili koliko dugo bi trajalo urušavanje jezgre Sunca.

Za početak razmotrimo tri tijela posložena u vrhove jednakostraničnog trokuta (slika). Centar trokuta je označen s A. Masa svakog tijela iznosi m, a početna udaljenost među njima je r_0. Ako se u trenutku $t = 0$ svakom od tijela preda brzina v_0 okomita na spojnicu sa centrom mase sustava i usmjerena u smjeru suprotnom od kazaljke na satu izračunajte koja je najmanja udaljenost među tijelima tokom gibanja i u kojem trenutku je ona postignuta.



Sunce ima masu $1.989 \quad 10^{30}$kg, radijus $R = 696000$km i srednji period rotacije oko svoje osi 28 dana. Modelirajući jezgru Sunca kao sistem prikazan u prošlom dijelu zadatka (tako da je masa svakog tijela jednaka trećini mase Sunca, a udaljenost od točke A jednaka radijusu Sunca), procijenite koliko bi dugo trajalo urušavanje Sunca. Prokomentirajte nedostatke ovog modela.

POSPREMANJE

Autor: Ivan Jerčić

Uvod

Svitalo je, kada je Filip umornih očiju stao pred svoj radni stol. Dva tjedna i tri dana nije ga bilo u tom zakutku, a znao je sve što ga tamo čeka: I. E. Irodov: Problems in General Physics i Zadaci Moskovskih olimpijada, sva tri dijela Plave zbirke Nade Brković, Žuta zbirka, sve matematike Nenada Elezovića, skripta iz Diskretne matematike i još mnoštvo drugih. Dva tjedna i tri dana prošla su od onog jutra kada je završio u kazni: srednjoškolac koji je mami uzeo deset kuna da ode s prijateljima na kavu, iako mu je isključivo rekla da prvo očisti radni stol. Otada on stoji u kazni, kao u nekoj karanteni dok se dan za danom ništa ne mijenja. Zastao je pred još uvijek neurednim stolom, i kao i onog jutra gomile knjiga činile su se teške, a cijeli posao mukotrpan i naporan, no ovaj put Filip je odlučio zavšiti s tim, i sa stolom, i s knjigama, i s kaznom.

Poglavlje I.

Filip je s tom mišlju sjeo na stol i počeo razmišljati. Nije želio knjigama dati dodatnu energiju, niti ju je želio oduzeti, samo ih je htio spremiti s jednakom energijom koju su imale na početku. Zatim je Filip pogledao svoj ormar. Bio je to visok ormar čije su police bile gusto nanizane jedna iznad druge, sve su imale jednak međusobni razmak u visini, sve su bile dovoljno velike da mogu primiti svaku knjigu sa stola, no to ga nije zanimalo. Znao je, također, da sve knjige moraju stajati uspravno, kako bi sve izgledalo lijepo i uredno u maminim očima te da nije bitan njihov raspored unutar jedne police. Zanimalo ga je tada na koliko načina može staviti knjige na police, a da na kraju imaju istu energiju. Za početak, kako bi si malko olakšao čitav posao, zamislio je da njegov ormar ima beskonačno mnogo polica te je takvom ormaru, vrlo orginalno, dao ime "Beskonačan ormar".

Zadatak 1 Na koliko načina W(n,m) Filip može smjestiti m knjiga (sve iste mase M te visine l) u "Beskonačan ormar" na police čija je udaljenost među susjednima jednaka L? Knjige na početku i na kraju imaju energiju $E{=}nMgL$, gdje je n prirodan broj. Najniža polica je na visini 0. (U cijelom zadatku permutacije knjiga unutar jedne police ne gledamo kao različito slaganje.)

Znao je Filip da njegov beskonačan ormar nije realan pa je krenuo tražiti prihvatljivije, realnije rješenje. Njegov ormar sada ima određen broj polica te je odlučio da takvom ormaru dati ime "Konačan ormar".

Zadatak 2 Na koliko načina W(n,m,k) Filip može smjestiti m knjiga (ponovo sve iste mase M te visine l) u svoj "Konačan ormar" koji ima k polica čija je udaljenost među susjednima jednaka L? Knjige na početku i na kraju imaju energiju E=$nMgL$, gdje je n prirodan broj. Najniža polica je na visini 0.

Zadatak 3 Kolika je očekivana vrijednost da će se u Filipovom "Beskonačnom ormaru" na određenoj polici P nalaziti knjiga? Ponovo kao i u prethodnom dijelu zadatka uzimamo u obzir da postoji m knjiga mase M, visine l, te da je razlika visina susjednih polica jednaka L.(Za sve bodove u ovom podzadatku konačan izraz ne smije biti napisan u obliku sume.)

Poglavlje II.

Međutim, Filip je lijen ili možda pak nije dobro ovladao kombinatorikom. Kako god bilo, Filip nije uspio riješiti zadatak 3. Dosjetio se tad nekih veličina s kojima se igrao još ljetos dok je stanovao u Parizu. Uzeo je tada komad papira iz jedne stare bilježnice koja datira još iz vremena kada je zapisivao čak i na satu povijesti te na njemu napisao sljedeću relaciju:

$$S = k_b ln(\mathrm{W}(E, m)) \tag{2}$$

te odmah nakon toga i sljedeću:

$$\frac{1}{k_b T(E)} = \frac{ln(\mathrm{W}(E, m)) \quad ln(\mathrm{W}(E \quad \mathrm{D}E, m))}{\mathrm{D}E}, \tag{3}$$

gdje $\mathrm{D}E$ energija potrebna da jednu knjigu podignemo na susjednu policu iznad, tj. $\mathrm{D}E = MgL$. Veličine M, L, m, W predstavljaju redom masu jedne knjige, visinu između susjednih polica, ukupan broj knjiga te mogući broj stanja za danu energiju. Veličinu S je Filip rado volio nazivati entropijom, a ovako definiranu veličinu T temperaturom. U ovom poglavlju Filip je promatrao samo "Beskonačan ormar".

Zadatak 4 Izračunajte ovisnost energije o tako definiranoj Filipovoj temperaturi T.

Nakon što je definirao termodinamčke veličine, Filip je shvatio kako ima pravi mali termodinamički sustav te da se isti, kao takav, mora ponašati u skladu sa svim zakonima termodinimike. Nedugo zatim Filip je shvatio da sve police međusobno moraju biti u termodinamičkoj ravnoteži, a taj zaključak mu je sad bio dovoljan da barem aproksimativno riješi zadatak 3. Filip je izračunao očekivanu vrijednost broja knjiga na određenoj polici u ovisnosti o temperaturi, a samim time i o energiji jer je relacija između njih bijektivna.

Zadatak 5 Polazeći od uvjeta da su sve police u termodinamičkoj ravnoteži, izračunajte izraz koji je dobio Filip, tj. očekivani broj knjiga na određenoj polici P u ovisnosti o Filipovoj temperaturi.

Potom je Filip primjetio da su njegove knjige iz matematike ponešto lakše od onih iz fizike. Filip je tada knjige podijelio na dva skupa: knjige iz fizike mase M_1, kojih ima m_1 te knjige iz matematike mase M_2, kojih ima m_2.

Zadatak 6 Pretpostavljajući da će sustav opet biti u termodinamičkoj ravnoteži te, ako knjige iz fizike na početku imaju energiju E_1^0, a knjige iz matematike energiju E_2^0, izračunajte koliki će biti omjer između dvije vrste knjiga na određenoj polici P ako Filip slaže knjige tako da je ukupna energija očuvana, tj. očuvan je zbroj $E_1 + E_2$. Ormar je ponovo "Beskonačan" te ima iste dimenzije kao ranije.

Poglavlje III.

Filip je sada počeo razmišljati o konačnim ormarima, no radi jednostavnosti pretpostavio je da ima jednu vrstu knjiga istih dimenzija te iste mase. Ubrzo je shvatio kako knjige žele pobjeći iz ormara na još više police što veću energiju imaju, no konačne ih dimenzije ormara u tome sprječavaju. Da bi matematički opisao ovu borbu između knjiga i ormara, Filip je, na valu svojih prijašnjih zaključaka, još jednom posegnuo za svojim termodinamčkim opisom sustava ormara i knjiga. U sustav je dodao novu veličinu V koju je nazvao volumenom, a označavao je broj polica koju ima "Konačan ormar". Zatim je krenuo u potragu za pripadnim tlakom. Znao je Filip da je ta veličina savršena za opis "želje koje knjige imaju da pobjegnu iz ormara", no pri izračunavanju naišao je na teškoće. Filip je zatim pogledao svoje bilješke te način na koji je definirao entropiju i njoj pripadnu temperaturu. Prisjetio se i Prvog zakona termodinamike koji glasi:

$$\mathrm{D}E = T\mathrm{D}S + p\mathrm{D}V \tag{4}$$

pa je nakon toga ubrzo došao do rješenja.

Zadatak 7 Koristeći Filipove zaključke te po uzoru na Filipovu definiciju temperature za pripadnu entropiju izračunajte i pripadni tlak *p(n,m,k)* za Filipov volumen, gdje je $n = \frac{E}{MgL}$, m broj knjiga, a k broj polica "Konačnog ormara". (Zbog kompliciranosti izraza za broj mogučih načina za složiti konačan ormar $Omega_k$ pri određenoj energiji u rješenju možete zapisati pomoču $\mathrm{W}_k(a, b, c)$ gdje a,b,c redom predstavljaju energiju, broj knjiga te broj polica.)

Filip je još sat vremena sjedio za stolom zadovoljan svojim zaključcima, uvidjevši da njegov ormar s knjigama stvarno jest termodinamički sustav. Ubrzo potom, sjetivši se dugo željene kave, ustao je od stola i laganim korakom napustio svoju sobu. A police? Police su ostale prazne.

Dodatna pojašnjenja i ispravke

- Radi jednostavnosti uzmite da je ukupna energija koju Filip ima na raspolaganju $E = nMgL + \frac{m \ Mgl}{2}$, gdje su n i m prirodni brojevi.
- Uzmite da je k u zadatku 7. dovoljno velik, tako da je ovisnost energije o temperaturi kod "konačnog" i "beskonačnog" ormara ista.
- Ako zamijenimo knjige A i B koje nisu na istoj polici to gledamo kao 2 različita slučaja.

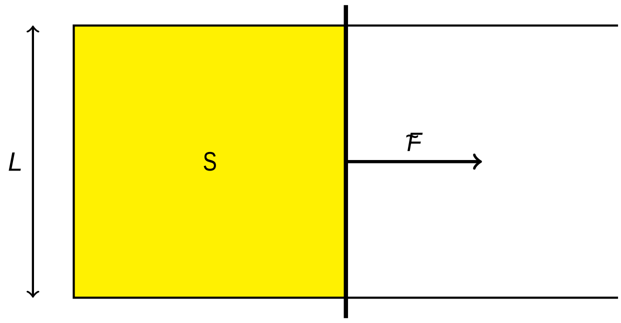
PRANJE SUĐA

Autor: Filip Novkoski

Otkako sam zapeo doma u karanteni, svaki dan kuham. No, onda svaki dan perem suđe. Ako niste primjetili, to nije najzabavnija aktivnost. Ali, tokom pranja moguće je primjetiti razne fenomene koje ćemo ovdje pokušati istražiti. Uz to, ovaj zadatak uključuje kućne pokuse.

Površinska napetost

Prije no što krenemo, osvrnut ćemo se na površinsku napetost. Površinska napetost se pojavljuje na granicama između dvije tekućine ili tekućine i plina. Naime, molekule u samoj tekućini su privučene sa svih strana silama kohezije. S druge strane, molekule na površini su privučene samo od strane molekula unutar te iste tekućine, te je efektivna sila prema unutra. Tu silu nazivamo površinskom napetošću.



Primjerice, na slici vidimo okvir s jednom pomičnom žicom, Na kvadratu se nalazi sapunica koja pokušava privući tu žicu. Sila kojom trebamo držati žicu kako se ona ne bi micala je dana s

$$F = gL \tag{5}$$

gdje je g koeficijent površinske napetosti te ima mjerne jedinice [N / m].

Zadatak 1 Koliki je tlak unutar mjehura od sapunice? Koliki je tlak unutar beskonačnog cilindra? Kolika je tipična veličina kapljica vode? Ovisi li ta veličina o temperaturi?

p teorem

Buckinghamov p-teorem je rezultat u dimenzionaloj analizi koji nam pomaže naći bitne bezdimenzionalne vrijednosti kao i za odrediti odnose među različitim varijablama u nekom problemu. Ako je problem opisan s n veličina (npr. g, M, F) koje su određene s m mjernih jedinica (npr. m, s, kg) tada je moguće napraviti $n \quad m$ različitih bezdimenzionalnih (bez mjernih jedinica) p brojeva, koji su međusobno u funkcionalnoj ovisnosti $f(p_1, p_2..p_{n \quad m}) = 0$.

Primjerice, uzmimo njihalo. Zanima nas period tog njihala T. Relevantne veličine su duljina L i gravitacija g. To znači da $n = 3$ i $m = 2$ te imamo samo jedan bezdimenzionalan p broj, koji je konstantan:

$$p = \frac{T^2 g}{L} \quad ! \quad T = const \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{6}$$

Gdje se konstanta može odrediti detaljnijim računom ili mjerenjem.

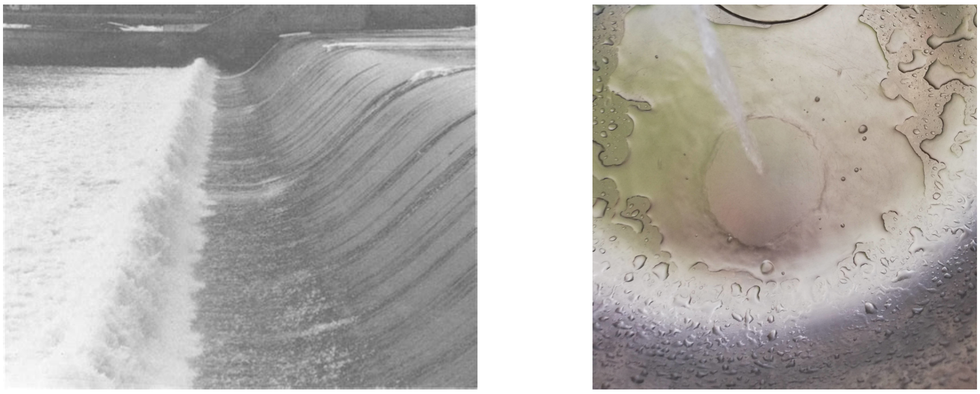
Zadatak 2 Odredite odnos između valne duljine i frekvencije valova na vodi ako je jedino bitan učinak gravitacije. Što ako još dodamo uvjet da je dubina vode h bitna? Ponovite račun u kapilarnom režimu (bitna je samo površinska napetost, ne gravitacija).

Slika 6: Mlaz se raspada u kapljice nakon neke udaljenosti.

Pipa

Pogledajmo prvo mlaz vode koji izlazi iz pipe. Pretpostavit ćemo da je ona savšeno kružnog oblika s polumjerom r_0 i da voda izlazi brzinom v_0.

Zadatak 3 Odredite vertikalni profil (u ovisnisti o visini) koji mlaz poprima kako izlazi iz pipe, zanemarujući površinsku napetost, te ga prikažite grafički. Što ako ne zanemarimo površinsku napetost? Procjenite vrijednost brzine u vašem sudoperu i usporedite vrijednost s dobivenim rezultatom.



(a) Skok vode nakon prolaska brane

(b) Prsten vode u sudoperu

Slika 7:

Kao što ste vjerojatno primjetili, postoji problem. Naime, mlaz se počne raspadati nakon što prijeđe neku udaljenost, kao što je prikazano na slici 6 (1 bod ako nađete tekućinu u kojoj se to ne događa i date razlog zašto). Želimo istražiti u kojem trenu se to dogodi. Aproksimirat ćemo na trenutak mlaz kao cilindar stalnog polumjera u kojem voda teče stalnom brzinom, te zanemarujemo gravitaciju.

Zadatak 4 Zašto se mlaz počne raspadati? Odredite koje su fizikalne veličine ovdje relevantne. Koristeći dimenzionalnu analizu i fizikalne argumente, odredite na kojoj udaljenost od pipe se mlaz počinje raspadati.

Nakon što ste to uspješno odredili, ostala je jedna slobodna konstanta, čiji detalji nas ne zanimaju. Okrećemo se sada provjeri analize putem mjerenja.

Zadatak 5 Osmislite pokus, naravno koristeći predmete koje imate doma, kako biste izmjerili ovisnost duljine raspada o jednoj od fizikalnih veličina (ona koju je najlakše mijenjati) te pokušajte odrediti nepoznatu konstantu na taj način.

Prsten

Kad pustimo vodu da teče u sudoperu, ono što možemo opaziti je formiranje prstena vode kao na slici 7. Želimo modelirati taj prsten i vidjeti o čemu taj fenomen ovisi. Zapravo, relativno nedavno je uloga gravitacije u ovom fenomenu dovedena u upit. Ovdje ćemo ju zanemariti te uzeti u obzir da se radi o kapilarnom režimu (jedino površinska napetost je bitna). No, još jedna stvar koja igra ulogu je viskoznost.

Viskoznost, najjednostavnije rečeno, opisuje unutarnje trenje tekućine. Primjerice med je viskozniji od vode zbog jakih međumolekularnih sila između šećera u medu, kao i veće duljine tih molekula.

Mi ćemo se usredotočiti na kinematičku viskoznost n s mjernim jedinicama [m^2/s]. Sila koja dolazi od trenja ovisi o toj konstanti, najčešće i gustoći, te i o brzini, što je predmet sljedećeg zadatka.

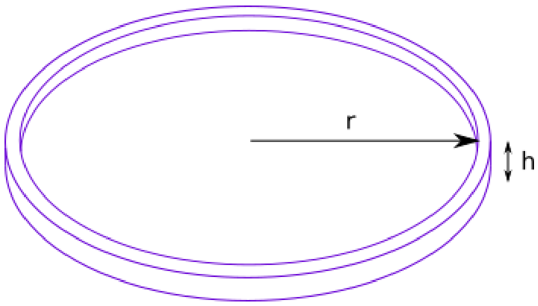
Zadatak 6 Ako se tijelo karakteristične veličine L kreće brzinom v kroz tekućinu gustoće r i kinematičke viskoznosti n, odredite silu koja djeluje na to tijelo koristeći p-teorem. Zapišite to u terminu Reynoldsovog broja *Re*. Odredite koje veličine mora biti padobran kako bi sigurno spustio čovjeka na zemlju (koliki je red veličine *Re*, uzmite da je funkcionalna ovisnost sile o njemu konstanta koja iznosi 1).

Prsten koji proučavamo je zapravo vrlo sličan fenomenu na slici koji se pojavljuje kod hidroelektrana. Naime, što se ondje dogodi je da voda velike brzine uđe u područje vode manje brzine te stvori "grbu" tj. skok u visini kao na slici 7. Imamo prijelaz vode iz zone nadkritičnog toka u subkritični tok (naime u ovom specifičnom slučaju voda putuje brže od brzine valova na vode te onda prijelazi u područje gdje je ta brzina manja od brzine valova). No, kod brana se radi o gravitacijskom režimu, dok ovdje radimo u kapilarnom.

Aproksimirajmo situaciju s prestenom visine h i polumjera r, kao na slici 8. Tok vode u centru prstena je stalan i dan s q [m^3/s]. Zanemarujemo gravitaciju, te je bitna samo površinska napetost.

Zadatak 7 Koristeći dimenzionalnu analizu odredite polumjer ovog prstena u ovisnosti isključivo o q. Vrijedi spomenuti, da u ovom slučaju viskozne sile su nadvladane od strane dinamičkih termina u NS jednadžbama, odnosno da $\frac{v^2}{r} \quad \frac{vn}{h^2}$, gdje je v brzina vode.

Zadatak 8 Osmislite i provedite eksperiment u kojem ćete provjeriti dobivenu relaciju u ovisnosti o protoku vode q.



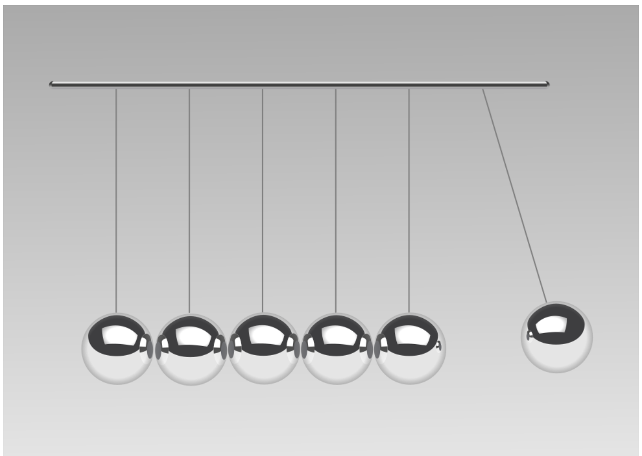
Slika 8: .

Naputak za pokuse Uz mjerenja obavezno priložite sliku pokusa. Mobitel, odnosno kamera, može biti odličan alat u mjerenjima.

KUGLICE

Autor: Nikola Poljak

U ovom ćemo se zadatku vratiti na jedan vrlo stari pokus i pokušati fizikalno objasniti što se u njemu točno događa. Radi se o Newtonovoj kolijevci (slika 9), tj. uređaju koji se sastoji od N kuglica obješenih tako da se taman dodiruju kad miruju na vertikalnim nerastezljivim nitima. Jedna od krajnjih kuglica, ili više njih, se odmakne iz ravnotežnog položaja i pusti u gibanje. Pitamo se kako će se sustav ponašati nakon toga. U svim zadacima pretpostavlja se da su niti bezmasene i nerastezljive, a kuglice su savršeno sfernog oblika, uvijek istog polumjera r. Kuglice nikad ne rotiraju oko vlastite osi, a bilo koji utjecaj okoline (trenje, otpor zraka itd.) se zanemaruje. U sudarima nema gubitaka energije.



Slika 9: Ilustracija Newtonove kolijevke s 6 kuglica. Primijetite da na ovoj ilustraciji postoji mali razmak između bilo koje dvije susjedne kuglice.

Zadatak 1 Krenut ćemo od najjednostavnijeg slučaja sudara dvije kuglice. Umjesto da razmatramo njihalo, promatramo jednu kuglicu mase m_1 koja miruje (u slobodnom prostoru), a na nju nalijeće druga kuglica mase m_2 brzinom v. Pretpostavimo da se smjer brzine poklapa sa spojnicom središta kuglica, što nazivamo centralni sudar. Kakve su brzine kuglica nakon sudara? Promotrite slučaj kad je $m_1 = m_2$.

Zadatak 2 Sad zamislite da u prostoru miruju dvije kuglice koje se taman NE DODIRUJU, svaka mase m, a na njih nalijeće kuglica, isto mase m, brzinom v. Spojnica središta sve tri kuglice je pravac, a na tom istom pravcu se nalazi smjer brzine nadolazeće kuglice. Ovo ustvari opisuje slučaj Newtonove kolijevke s 3 kuglice među kojima postoji mali razmak.

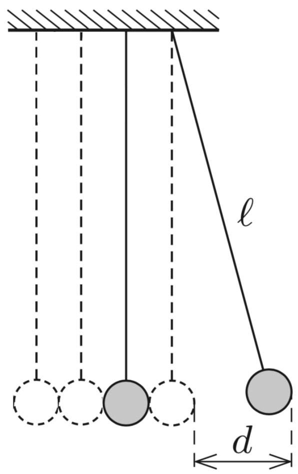
Kakve su brzine kuglica nakon sudara?

Zadatak 3 Pretpostavimo sad da imamo ponovljene uvjete prethodnog zadatka, no kuglice koje miruju SE DODIRUJU. Pokažite da postoji više slučajeva konačnog stanja sustava koji imaju jednaku ukupnu količinu gibanja i jednaku kinetičku energiju kao i početno stanje sustava. Odredite ta stanja. Ako su za njih zadovoljeni svi zakoni očuvanja, zašto onda u Newtonovoj kolijevci uvijek vidimo isti ishod?

Zadatak 4 U stvarnoj realizaciji Newtonove kolijevke kuglice se uvijek dodiruju u stanju mirovanja. Radi jednostavnosti, promatramo kolijevku sa samo 3 kuglice, od kojih jednu podignemo i pustimo u gibanje. Pokušajte razmisliti i opisati što bi se desilo kad bi Newtonovu kolijevku modificirali na slijedeće načine:

- srednju kuglicu mase m zamijenimo kuglicom mase $2m$, no polumjer joj ostavimo kakav je bio i ranije,
- srednju kuglicu polumjera r zamijenimo kuglicom polumjera $2r$, no masu joj ostavimo kao i ranije,
- srednju kuglicu polumjera r zamijenimo kuglicom polumjera $2r$, no gustoću joj ostavimo kao i ranije i
- srednju kuglicu deformiramo iz sfere polumjera r u valjak promjera baze r i visine r. Valjak stoji tako da ga kuglica koja ga udara i kuglica koja kraj njega miruje, dodiruju okomito na baze.

Zadatak 5 Dolazimo konačno na slučaj kolijevke s N kuglica. Pretpostavite da su sve kuglice iste i da se kolijevka pokrene u gibanje tako da se skroz desna kuglica makne iz ravnotežnog položaja za d i pusti u gibanje. U svakom sudaru gubi energija na zvuk i to tako da se promatrano iz sustava centra mase relativna brzina kuglica smanjuje za faktor k.



Slika 10: Prikaz zadatka 5. Desna kuglica odmakne se za d i pusti u gibanje. Sustav se prostire ulijevo dok broj kuglica ne postane N.

Kako će se sustav gibati nakon velikog broja sudara? Koliki će tad biti horizontalni odmak kuglica od ravnotežnog položaja?

KORISNI MATEMATIČKI IZRAZI

Prirodni logaritam $\ln(x)$:

$$y = e^{x} \quad =) \quad x = \ln(y)$$
$$e^{\ln(x)} = x$$
$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \quad y) \quad \ln(x) \quad \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\ln(x^{n}) = n \quad \ln(x) \quad \ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1$$

Trigonometrijski identiteti:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \quad \cos(y) + \cos(x) \quad \sin(x)$$
$$\cos(x + y) = \cos(x) \quad \cos(y) \quad \sin(x) \quad \sin(y)$$
$$\sin\left(\frac{p}{2} \quad x\right) = \cos(x) \quad \sin(x + p) = \quad \sin(x) \quad \sin(\quad x) = \quad \sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{p}{2} \quad x\right) = \sin(x) \quad \cos(x + p) = \quad \cos(x) \quad \cos(\quad x) = \cos(x)$$
$$\sin^{2}(x) + \cos^{2}(x) = 1$$

Hiperbolne funkcije:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} \quad e^{\ \ x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{\ \ x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\cosh^{2}(x) \quad \sinh^{2}(x) = 1$$

Kombinatorika:

broj permutacija: $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

broj k-članih podskupova skupa s n elemenata: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

broj varijacija: $V_r(n) = \frac{n!}{(n-r)!}$

broj varijacija s ponavljanjem: $\overline{V}_r(n) = n^r$

broj kombinacija: $K_r = \binom{n}{r}$

broj kombinacija s ponavljanjem: $\overline{K}_r(n) = \binom{n+r-1}{r}$

očekivana vrijednost: $E = \sum_{i=0}^{n} i \cdot p(i)$

pri čemu je $p(i)$ vjerojatnost da se dogodio slučaj i

Za $q < 1$ vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$$

pa je

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

Part II

Matematika

NEOBIČNE KOCKE

Autor: Ivan Miošić

Pridržavajući se svih mjera zaštite, na samom početku natjecanja posjetit ćemo obitelj Koronić, koja karantenu uljepšava igrajući Monopoly. Članovi obitelji Koronić su vješti matematičari i stoga znaju da je vjerojatnost da dobiju zbroj 2 na dvije kocke jednaka $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$ da dobiju zbroj 3, $\frac{3}{36}$ za 4, ... i $\frac{1}{36}$ za 12. Kraće možemo reći i napisati da je distribucija zbrojeva na dvije kocke dana tablicom:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Nakon par rundi igre, sestra Koronić zapitala se sljedeće: mogu li učiniti igru zanimljivijom tako da umjesto dvije obične kocke označene brojevima od 1 do 6 koriste dvije nove kocke s drukčijim oznakama, ali bez promjene tijeka igre, tj. tako da vjerojatnost dobivanja bilo kojeg zbroja ostane ista. Za potrebe rasprave, bilo koji par kocaka koji zadovoljava ovo svojstvo nazivat ćemo *regularnim*. Sve oznake će biti prirodni brojevi.

Zadatak 1 [2 boda] Predložite sestri Koronić jedan regularni par kocaka, različit od običnih. Dakle, pronađite oznake koje trebaju pisati na novim kockama, uz koje je vjerojatnost (ili broj načina) dobivanja bilo kojeg zbroja od 2 do 12 jednaka kao i za par običnih kocaka.

Nakon što je zajedno s bratom programerom uspjela pronaći tražene kocke, sestra Koronić je naumila pronaći sve parove kocaka koji zadovoljavaju ovo svojstvo.

Zadatak 2 [4 boda] Pronađite sve regularne parove kocaka.

Njezin brat je također razmišljao o problemu regularnih kocaka, ali na pomalo neobičan način. On je uzeo novčić i poliedar s 18 strana umjesto dvije obične kocke. Sada želi upisati brojeve na dvije strane novčića i na svih 18 strana poliedra, na način da zbrojevi od 2 do 12 ponovno imaju jednaku vjerojatnost. I ovakve parove poliedara nazivamo *regularnim*. (m-terostrani poliedar s oznakom na svakoj strani u ovom kontekstu možemo shvaćati i kao posudu u kojoj se nalazi m kuglica, svaka označena jednako kao jedna strana poliedra. Na ovaj način i novčić postaje 2-strani poliedar.)

Zadatak 3 [2 boda] Pronađite sve regularne parove novčića i 18-erostranog polieadra.

Ostavljamo obitelj Koronić da uživa u blagodatima izolacije. Promotrit ćemo tri poopćenja problema regularnih kocaka. Prvo se odnosi na općenite regularne poliedre.

Zadatak 4 [4 boda] Pronađite sve regularne parove poliedara. Dakle, odredite sve moguće brojeve strana oba poliedra i oznake koje pišu na njima.

Vratimo se na kocke. Sada pretpostavimo da umjesto dvije, bacamo $n > 2$ kocaka. Ponovno nazivamo *regularnim* sve n-torke označenih kocaka s istom distribucijom mogućih zbrojeva kao i za n običnih kocaka.

Zadatak 5 [4 boda] Pronađite sve regularne n-torke.

Zadnji zadatak ide u drugom smjeru. Pitamo se koji zbrojevi se mogu pojaviti umjesto standardnih $2, 3, \ldots, 12$, ali tako da njihova distribucija ostane jednaka.

Zadatak 6 [4 boda] Opišite sve nizove prirodnih brojeva $S = (s_2, s_3, \ldots, s_{12})$, za koje vrijedi sljedeće: postoje dvije kocke s oznakama $a_1, a_2, \ldots, a_6$ te $b_1, b_2, \ldots, b_6$, čijim bacanjem je moguće dobiti zbrojeve koji su elementi niza S, i to s jednakom distribucijom kao zbrojeve $2, 3, \ldots, 12$ prilikom bacanja para običnih kocaka.

Funkcije izvodnice

U rješavanju problema iz ovog zadatka, osim kocaka, papira i olovke te kompjutera, mogli bi vam pomoći i, na iznenađenje, polinomi.

Definicija. Neka je zadana vjerojatnosna distribucija tablicom

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Polinom g zadan s

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x^{a_i} = p_1 x^{a_1} + p_2 x^{a_2} + p_3 x^{a_3} + \cdots + p_n x^{a_n}$$

zovemo *funkcija izvodnica* zadane vjerojatnosne distribucije.

Važno svojstvo funkcija izvodnica tiče se zbroja nekoliko distribucija. Možete o tome razmišljati, a i potvrditi, kao zbroj brojeva na dvije kocke. Nezavisnost distribucija shvaćamo tako da ishod jedne ne utječe na ishod druge i obratno.

Teorem. *Neka su zadane dvije* nezavisne *distribucije koje redom imaju polinome f i g kao funkcije izvodnice. Tada je funkcija izvodnica zbroja dvije zadane distribucije jednaka umnošku polinoma $f \cdot g$, tj. umnošku pojedinih funkcija izvodnica.*

ITERACIJE

Autor: Josip Pupić

Uvod

U ovom problemu, bavit ćemo se iteriranjem (višestrukim primijenjivanjem) pojedinih funkcija na različitim skupovima i promatrat ćemo neka njihova zanimljiva svojstva. Općenito, imat ćemo neki skup A i neku funkciju $f : A \to A$, te ćemo za proizvoljan $x \in A$ razmatrati skup iteracija te točke, odnosno skup $\{f^n(x) = f(f(\dots f(x))), n \in \mathbb{N}\}$. U tu svrhu, definirajmo prvo neke osnovne pojmove.

Napomena 1 U ovom zadatku, i općenito na natjecanju, susrest ćete se s puno novih pojmova koji bi vam se na prvu mogli učiniti kompliciranima. Nakon svake definicije i svakog rezultata pokušavat ćemo vam i na intuitivan način objasniti o čemu je tu zapravo riječ i kako zamišljamo pojedine pojmove. Također, bit će i primjera na kojima možete jednostavnije vizualizirati sve nove pojmove i rezultate.

Definicija 1 Neka je A neki skup i $f : A \to A$ funkcija na tom skupu. Neka je $x \in A$.

- $f^n(x)$ je **n-ta iteracija** točke x pod funkcijom f, odnosno $f^n(x) = (f \circ \dots \circ f)(x) = f(f(\dots f(x)))$, pri čemu je f primijenjena n puta.
- **Orbita** točke x je skup $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, tj skup koji sadrži sve iteracije neke točke.
- Točka x je **fiksna točka** funkcije f ako je $f(x) = x$.
- Točka x je **periodična točka** funkcije f ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $f^p(x) = x$. Tada je p **period** točke x, a **osnovni** period točke x je najmanji prirodan broj p takav da je $f^p(x) = x$.
- Točka x je **predperiodična točka** funkcije f ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^m(x)$ periodična točka.

Zadatak 1 *(2 boda)*

1. Neka je $f : A \to A$ neka funkcija i neka je $x \in A$ neka njezina periodična točka osnovnog perioda p. Dokažite da je x periodična točka funkcije f perioda kp, tj da je kp također period točke x, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

2. Smislite primjer neke predperiodične točke, koja nije periodična, za neku funkciju. Dakle, definirajte skup na kojem funkcija djeluje, zatim definirajte funkciju i navedite neku njezinu predperiodičnu točku te dokažite da je ona predperiodična i da nije periodična.

Primijetimo da nam za dosad uvedene pojmove, nikakav pojam "udaljenosti" nije bio bitan. Dakle, možemo pričati npr o periodičnosti točke, bez da uopće imamo uvedenu nekakvu mjeru udaljenosti na skupu na kojem se nalazimo. Za sljedeći pojam koji uvodimo, trebat će nam biti definirana nekakva udaljenost među točkama na skupovima na kojim se nalazimo. Ta "udaljenost" se u matematici naziva "metrika", a skupovi opremljeni metrikom, tj skupovi na kojima postoji definirana funkcija koja na neki način mjeri udaljenosti među elementima tog skupa, nazivaju se metrički prostori. U zadacima kojima ćemo se mi baviti će uvijek biti jasno što je metrika na promatranom skupu (npr svi znate kako mjerimo udaljenosti među točkama na pravcu, u ravnini ili u prostoru).

Definicija 2 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^k$, pri čemu je $k = 1$ ili $k = 2$ ($\mathbb{R}^2$ je oznaka za dvodimenzionalnu ravninu, dakle skup koji sadrži sve uređene parove realnih brojeva). Za podskup B skupa A kažemo da je **gust u A** ako za svaki $x \in A$ i za svaki broj $c > 0$ postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < c$. Pritom $d(x, y)$ označava udaljenost između točaka x i y, u slučaju $k = 1$ iznosi $|y - x|$, a u slučaju $k = 2$ iznosi $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, pri čemu je $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$.

Ovako definiran pojam gustoće skupa B u skupu A zapravo znači da skup B "dovoljno dobro aproksimira" skup A, odnosno da se svakoj točki iz skupa A možemo proizvoljno "približiti" točkama iz skupa B. Na primjer, lako se vidi da je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gust u skupu $\mathbb{R}$. Pokažimo to po definiciji. Dakle, uzmimo proizvoljan $x \in A = \mathbb{R}$ i proizvoljan realan broj $c > 0$. Ako je $x \neq 0$ primijetimo da je onda $x \in B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, odaberemo li $y = x$, očito je $d(x, y) = d(x, x) = 0 < c$, pa smo uspješno našli pripadni y za ovakve x. Preostaje još samo slučaj $x = 0$. Tada ne možemo odabrati $y = x$ jer se 0 ne nalazi u B. Međutim, primijetimo da je $d(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ te da je $\frac{1}{n} \in B$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Možemo odabrati dovoljno velik prirodan broj n_0 takav da je $\frac{1}{n_0} < c$ pa je $y = \frac{1}{n_0}$ dobar izbor. Dakle, uspjeli smo se svakom x "približiti" na proizvoljno malenu udaljenost c. Promotrimo još sljedeći važan primjer.

Lema 1 Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je gust u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Dokaz leme 1 Poznato je da se svaki realni broj r može zapisati u decimalnom zapisu s konačno ili beskonačno decimala. Ako je $r = r_0.r_1...r_k$, pri čemu su $r_0 \in \mathbb{Z}$, a $r_1, ..., r_k$ decimale, onda je jasno da je taj broj racionalan jer ga možemo zapisati kao

$$r = r_0 + \frac{r_1 \cdot 10^{k-1} + ... + r_k}{10^k}$$

Neka je sada $r = r_0.r_1...r_k...$, realan broj s beskonačnim decimalnim zapisom i neka je $c > 0$ proizvoljan realan broj. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{10^n} < c$. Neka je $q = r_0.r_1...r_n$. To je, prema ranije pokazanom, racionalan broj. Vrijedi $r - q = 0.0...0r_{n+1}....$ Dakle, tek $(n + 1)$-ta decimalna znamenka je možda različita od 0 pa je $r - q < \frac{1}{10^n} < c$. Odavde slijedi da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ jer smo proizvoljnom realnom broju r uspjeli "doći proizvoljno blizu" nekim racionalnim brojem q.

U daljnjim zadacima smijete koristiti ovu činjenicu. Pojam gustoće smo uveli jer ćemo na konkretnim primjerima primijetiti da je to svojstvo orbita pojedinih točaka pod iteracijama nekih funkcija.

Zadatak 2 ***(2 boda)*** Dokažite da je skup $\mathbb{Q}^2$ gust u skupu $\mathbb{R}^2$, odnosno da je skup svih uređenih parova racionalnih brojeva gust u dvodimenzionalnoj ravnini.

Za kraj uvoda, definiramo pojmove koji nam omogućuju podjelu fiksnih točaka na 2 skupine. Krenimo s formalnom definicijom niza.

Definicija 3 Neka je A neki skup. **Niz** elemenata skupa A je funkcija $a : \mathbb{N} \to A$. Standardni zapis niza je $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Češća oznaka je $(a_n)_n$.

Ovakva definicija niza (kao funkcije) vas možda iznenađuje, ali to je samo formalna defincija. I dalje niz zamišljamo na tradicionalan način, kao beskonačnu listu brojeva. Primijetimo da se u ovom problemu bavimo iteriranjem neke funkcije f na nekom skupu. Dakle, prirodno dolazimo do nizova kada uzmemo neku proizvoljnu točku i primijenjujemo funkciju f na nju koliko god puta nam je potrebno. Elementi orbite onda zapravo čine niz. U tim razmatranjima, vidit ćemo da se pojavljuju situacije kada točke niza "teže" prema nekoj točki u promatranom skupu. Jasno je da nam je za pojam "težiti k nečemu" ponovno potrebna nekakva mjera udaljenosti pa ćemo u definiciji formalno opet pričati o tzv. metrici. No, svi zadaci se odvijaju u $\mathbb{R}$ ili u ravnini pa su nam poznate "udaljenosti" u tim skupovima, a skup A o kojem pričamo u defenciji će zapravo samo biti podskup od $\mathbb{R}$ ili podskup ravnine.

Definicija 4 Neka je $(a_n)_n$ niz elemenata u skupu A na kojem imamo metriku d. Točku $l \in A$ zovemo **limes** niza $(a_n)_n$ ako za svaki realan broj $c > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $d(a_n, l) < c$ za svaki $n \geq n_0$. Kažemo da niz **konvergira** prema limesu.

U ovoj definiciji prepoznajemo slične elemente kao u defenciji pojma gustoće. Već smo rekli da ovime zapravo definiramo pojam da niz "teži" k nekoj točki. Dakle, limes niza je takva točka da koliko god blisku okolinu oko nje promatramo, za dovoljno velike članove niza će vrijediti da su oni ušli unutar te okoline i niz iz nje više nikad ne izlazi.

Primjer 1

- Neka je $a_n = \frac{1}{n}$ za svaki prirodan broj n. Sada je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$ čiji je limes 0.
- Neka je $b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ za svaki prirodan broj n. $(b_n)_n$ je niz u $\mathbb{R}$ čiji je limes 2.
- Neka je $c_n = (-1)^n$ za svaki prirodan broj n. Sada je $(c_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$ koji nema limes. Naime, taj niz je sastavljen od naizmjeničnih elemenata -1 i 1. Dakle, limes sigurno nije nešto različito od -1 i 1 jer mu se niz neće nikada dovoljno približiti. Međutim, limesi nisu ni 1 ni -1 s obzirom da koliko god veliki n uzmemo, uvijek postoje elementi niza nakon n-tog člana jednaki i 1 i -1 pa niz nikada neće "ući u jako malu okolinu" nekog od ta 2 broja.

Ovo nam napokon omogućuje podjelu fiksnih točaka koju smo htjeli. Sada ćemo se fokusirati samo na jednodimenzionalni slučaj, iako je i općenita definicija analogna.

Definicija 5 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i x fiksna točka funkcije $f : A \to A$. Kažemo da je x

- **privlačna** fiksna točka ako postoji $c > 0$ takav da za svaki y vrijedi, ako je $d(x, y) < c$, onda niz $(f^n(y))_n$ konvergira prema x.
- **odbojna** fiksna točka ako postoji $c > 0$ takav da za svaki $y \neq x$ vrijedi, ako je $d(x, y) < c$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, f^n(y)) \geq c$.

Kružnica

Zadatak 3 (3 boda) Neka je S jedinična kružnica u dvodimenzionalnoj ravnini, dakle kružnica sa središtem u ishodištu i radijusom 1. Neka je $\alpha \in [0, 2\pi) = [0^\circ, 360^\circ)$ proizvoljan kut. Neka je $R_\alpha : S \to S$ funkcija koja svaku točku na kružnici rotira za kut α (u smjeru suprotnom od kazaljke na satu). U ovisnosti o kutu α, odredite orbite svih točaka kružnice pod djelovanjem funkcije R_α. Dakle, odredite koje su točke periodične, predperiodične te one koje imaju gustu orbitu u kružnici.

Kvadratna funkcija

Zadatak 4 (4 boda) U ovom zadatku promatramo funkciju $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ na skupu $\mathbb{R}$. U ovisnosti o parametru μ odredite fiksne točke funkcije F_μ te jesu li one privlačne ili odbojne.

Po dijelovima linearna funkcija

Definicija 6 Neka je $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je **po dijelovima linearna** ako postoje $k \in \mathbb{N}$ i točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} = b$ takvi da je funkcija f linearna na svakom od segmenata $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_k, x_{k+1}]$.

Dakle, po dijelovima linearna funkcija izgleda kao "izlomljena crta" s konačno mnogo lomova. Na svakom od tih $k + 1$ segmenata iz definicije, graf ove funkcije je upravo pravac. U zadacima u ovoj cjelini razmatramo samo po dijelovima linearne funkcije i otkrivamo neka njihova svojstva.

Zadatak 5 (3 boda) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima linearna funkcija, takva da je $[a, b] \subseteq f([a, b])$. Dokažite da tada funkcija f ima fiksnu točku na segmentu $[a, b]$.

Zadatak 6 (6 bodova) Za neki $n \in \mathbb{N}$, **n-ploča** je skup svih točaka (x, y) u ravnini takvih da je $1 \leq x \leq n$ i $1 \leq y \leq n$. Radioaktivni pauk plete svoju mrežu na n-ploči u n koraka. U prvom koraku, pauk bira početnu poziciju koja mora biti oblika $(1, l)$, pri čemu je $l \in \{1, \ldots, n\}$. Za $k \geq 2$, u k-tom koraku pauk odabire točku oblika (k, l), pri čemu je $l \in \{1, \ldots, n\}$ i plete mrežu od svoje trenutne pozicije ravno do novoizabrane pozicije. Posljedica radioaktivnosti je da se pauk može teleportirati s pozicije (x, y) koja se nalazi na mreži u poziciju (y, z) koja se nalazi na mreži. Točku sa svojstvom da postoji niz od k teleportacija koji počinje i završava u njoj, te nije posjećena u međukoracima, zovemo **k-ciklična točka**. Može li pauk isplesti mrežu na 5-ploči tako da postoji 5-ciklična točka, a da pritom ne postoji:

a) 2-ciklična točka?

b) 3-ciklična točka?

ELIPTIČNE AVANTURE

Autor: Luka Kraljević

Uvod

Mnogima je poznat lik kružnice, jedan od geometrijskih pojmova s kojim se vrlo rano susrećemo. Njena jednostavna definicija kao skup točaka jednako udaljenih od centra omogućava i jednostavnu konstrukciju alatom poput šestara.

U natjecateljskoj matematici postoji pregršt zadataka kojima je predmet proučavanja odnos kružnice sa ostalim elementima geometrije. Ali ih je vrlo malo koji se bave svojstvima, kružnici srodnom liku, elipsi.

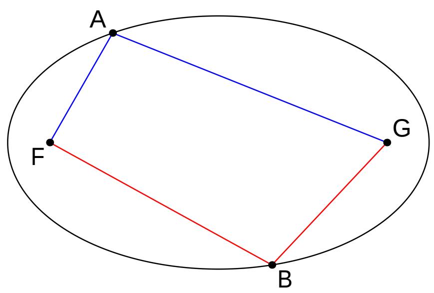
Ovaj zadatak je osmišljen da vam pokaže zanemarenu ljepotu elipse, iskazanoj u okviru četverokuta. No prije no što dođemo do tamo, upoznajmo se sa elipsom.

Što je to Elipsa

Elipsa je krivulja u ravnini koja okružuje dva fokusa, takva da za svaku točku na krivulji suma udaljenosti od fokusa ostaje konstanta. U slučaju kružnice fokusi se podudaraju i tu točku zovemo centar. Kod elipse pak imamo veliku i malu poluos, kao i ekscentricitet koji opisuje "spljoštenost" elipse. Veze između ovih elemenata postoje, no analitičkog aspekta se ovdje nećemo doticati, već ćemo se usredotočiti na sintetička svojstva.

Osnovna karakterizacija elipse

Neka je dana elipsa sa fokusima F i G, i dvije proizvoljne točke A i B na elipsi. Navedena definicija elipse se može zapisati u sljedećem obliku:



$$AG + AF = BG + BF$$

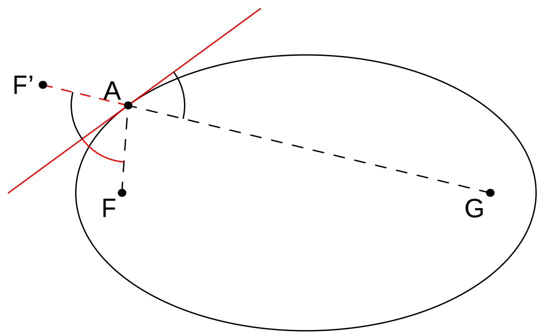
Ispostavlja se da je ova karatakterizacija elipse dovoljna za izvesti sva fascinantna svojstva koja slijede.

Izvanredna svojstva elipse

Jedno od prvih svojstava koja otkrivamo o elipsi je takozvano optičko svojstvo elipse, čiji naziv dolazi od fizikalne prirode svjetlosti.Naime ako postavimo izvor svjetlosti u jedan od fokusa i unutrašnjost elipse obložimo staklom, nakon refleksije od stijenke elipse se sve zrake sastaju u drugom fokusu. Ako zumiramo dovoljno u točku na elipsi, elipsa lokalno izgleda poput pravca. Stoga u iskaz teorema uvodimo tangentu koja lokalno oponaša elipsu.

Teorem 1. *(Opičko svojstvo elipse)*
Neka je E elipsa sa fokusima F i G, i t pravac tangentan na E u točki A. Tada je

$$\measuredangle(t, AF) = \measuredangle(AG, t)$$



$$AF' + AG = AF + AG = k$$

gdje je k konstanta ovisna o elipsi. Ako promotrimo neku drugu točku na tangenti t koja nije A uviđamo da se ona nalazi strogo izvan elipse pa je time suma udaljenosti te točke od fokusa veća od konstante k. Dakle A je točka na tangenti čija je suma udaljenosti od fokusa F i G minimalna, ili ekvivalentno čija je suma udaljenosti od točke F' i G minimalna, takva točka mora ležati na pravcu $F'G$ jer je najkraći put koji spaja dvije točke dužina s vrhovima u tim točkama. Zamislimo sada da točku A možemo odvojiti

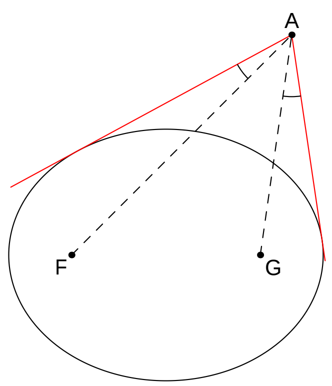
od elipse i premjestiti izvan elipse na način da se tangenta t razlomi na dva polupravca t_1 i t_2 koji su tangentni na E. Zadivljujuće je kako ova jednakost kuteva ostane očuvana pri opisanoj transformaciji.
Poslužite se geogebrom kako bi vam prijelaz na sljedeći teorem bio što prirodniji.

Teorem 2. *(Izogonalno svojstvo elipse) Neka je E elipsa sa fokusima F i G, a t_1 i t_2 tangente na E iz točke A. Tada vrijedi:*

$$\measuredangle(t_1, AF) = \measuredangle(AG, t_2)$$

Skica dokaza

1. Preslikajte fokuse preko tangenti t_1 i t_2 i iskoristite optičko svojstva elipse
2. Uočavate li sukladne trokute?
3. Koristeći sukladne trokute utvrdite jednakost kuteva.



Tangente na elipsu

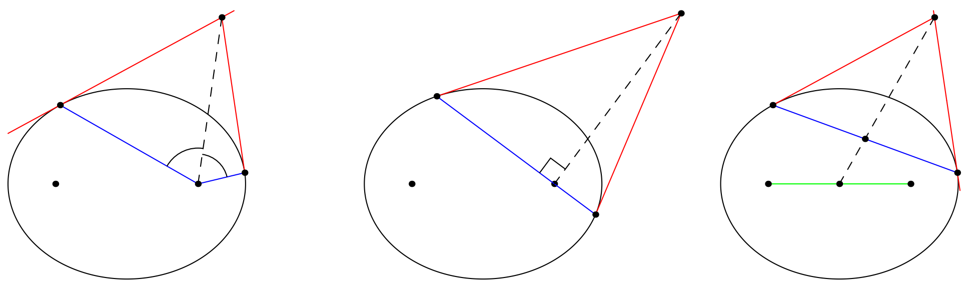
Da bismo se na kraju mogli suočiti sa elipsom upisanom u četverokut potebno je pobliže istražiti svojstva tangente na elipsu.

Zadatak 1. *(2 boda) Neka je A točka izvan elipse E s fokusima F i G čije tangente diraju E u točkama X i Y. Dokažite da*

$$\backslash XGA = \backslash AGY$$

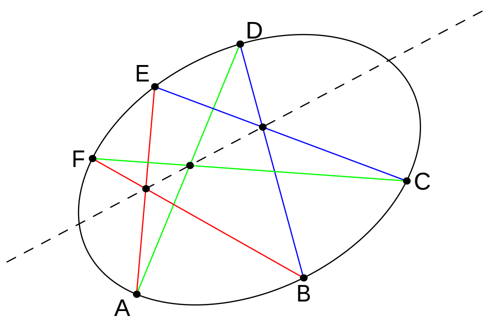
Zadatak 2. *(0.5 bod) Dana je elipsa E sa fokusima F i G. Pravac p prolazi kroz fokus G i siječe elipsu u točkama X i Y. Dokažite da pripisana kružnica trokuta FXY nasuprot vrha F dira stranicu XY u G.*

Zadatak 3. *(3 boda) Neka je A točka izvan elipse E s fokusima F i G čije tangente diraju E u točkama X i Y. Označimo sa P polovište dužine XY i sa S središte elipse (polovište dužine FG). Dokažite da pravac AP prolazi kroz središte elipse S.*



Pascalov Teorem

Slijedi jedan od najelegantnijih teorema u projektivnoj geometriji, kojeg nećemo dokazivati radi sažetosti.



Teorem 3. *(Pascal) Neka su A, B, C, D, E, F proizvoljne točke na elipsi i neka su dane točke*

$$X = AE \backslash BF$$
$$Y = BD \backslash CE$$
$$Z = CF \backslash AD.$$

Tada su točke X, Y i Z kolinearne.

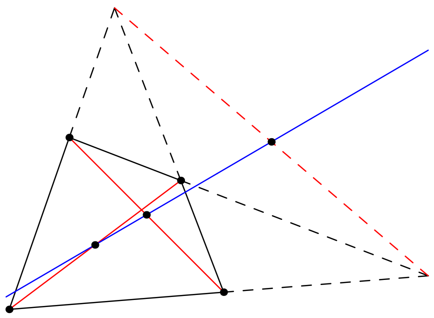
Zgodno je što točke A, B, C, D, E, F ne moraju nužno biti u ovom rasporedu, ne mora ih čak ni biti 6. Naime Pascalov teorem funkcionira i u degeneričnim slučajevima.

Zadatak 4. *(1 bod) Neka su točke A, B, C, D dane na elipsi E tim redom. Pravci AB i CD se sijeku u P a AC i BD u Q. Neka se tangente u točkama B i C na elipsu E sijeku u R a tangente u točkama A i D sijeku u S. Dokažite da točke P, Q, R, S leže na istom pravcu.*

Četverokuti

Kao i u svakoj priči potrebno je ispravno predstaviti pozadinu drugog glumca, a to je u ovom slučaju četverokut. Točnije jedan poseban pravac četverokuta koji je naizgled nepovezan sa krivuljama.

Poseban pravac



Teorem 4. *(Newton - Gauss) Dan je četverokut $ABCD$, pravci AB i CD su produženi tako da se sijeku u E a pravci BC i AD su produženi tako da se sijeku u F. Tada polovišta dužina AC, BD i EF leže na jednom pravcu. Ovaj pravac nazivamo Newton-Gaussov pravac.*

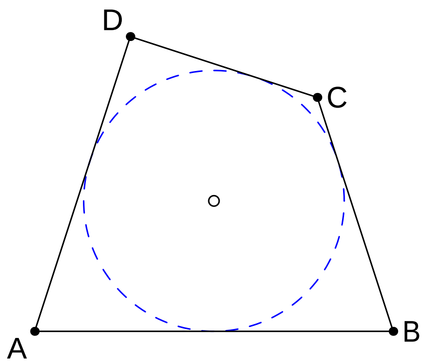
Teorem je sam po sebi kvalitetan zadatak, no njega navodimo kako bismo vidjeli neke od točaka koje leže na ovom pravcu.

Tangencijalni četverokut

Vratimo se na trenutak korak unatrag, kada uopće možemo četverokutu upisati kružnicu. Odgovor na to pitanje nam daje Pitotov teorem sa karakterizacijom tangencijalnog četverokuta. Ukoliko se četverokutu $ABCD$ može upisati kružnica koja dira sve stranice, tada stranice četverokuta zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$AB + CD = BC + DA$$

može se dokazati da vrijedi i obrat, to jest da je četverokut $ABCD$ tangencijalan ako i samo ako je $AB + CD = BC + DA$



Što možemo zaključiti o središtu ove upisane kružnice. Zasigurno leži na simetralama svih unutrašnjih kuteva četverokuta, ispostavlja se da leži i na našem posebnom pravcu.

Zadatak 5. *(2 boda) Dokažite da središte upisane kružnice tangencijalnog četverokuta leži na Newton - Gaussovom pravcu tog četverokuta.*

Zadatak 6. *(1.5 bod) Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut i $E = AB \setminus CD$, $F = BC \setminus DA$. Dokažite da ili B i D ili A i C leže na elipsi s fokusima E i F.*

Zadatak 7. *(2.5 boda) Neka su A i B točke na elipsi E s fokusima F i G takve da se A i B nalaze s iste strane pravca FG. Neka je $C = AF \setminus BG$ i $D = AG \setminus BF$. Ukoliko su točke C i D s različitih strana pravca FG, dokažite da A i B leže na elipsi L s fokusima C i D, te da je L tangentna na E u točkama A i B.*

Upisana Elipsa

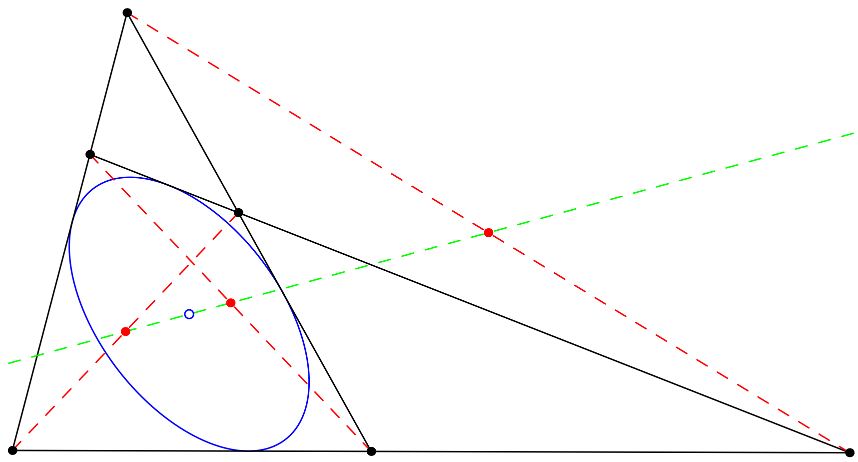
Pitotov teorem nam pruža ograničenje na vrstu četverokuta kojima možemo upisati kružnicu. Budući da se elipse mogu shvatiti kao izobličena forma kružnice, nije za čudo shvatiti da se svakom četverokutu mogu upisati elipse.

Čak štoviše svakom četverokutu se može upisati beskonačno mnogo elipsi.

Zadatak 8. *(2.5 boda) Za proizvoljno danu točku P na stranici AB četverokuta $ABCD$, ravnalom konstruirajte točke Q, R i S takve da su P, Q, R i S dirališta neke elipse sa stranicama AB, BC, CD i DA redom. Sve netrivijalne tvrdnje u konstrukciji potrebno je dokazati.*

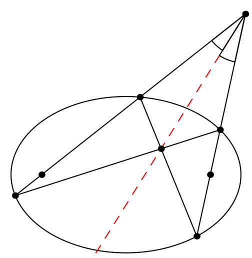
Dalje je jedino bitno definirati središte elipse, sasvim prirodna definicija je polovište dužine koja spaja fokuse. Inspirirani Zadatkom 5. pozvani smo dokazati i sljedeću tvrdnju

Zadatak 9. *(1 bod) Neka je dan četverokut $ABCD$ i njemu upisana elipsa E, dokažite da središte elipse E leži na Newton-Gaussovom pravcu.*



Za kraj ćemo se suočiti sa malo zahtjevnijim zadatkom projektivne geometrije, i prikladnom pomoćnom lemom prije njega.

Zadatak 10. *(1 bod) Dana je elipsa E sa fokusima F i G, dva pravca p i q koja se sijeku izvan elipse u točki X, takva da F leži na p i G leži na Q. Neka je $ABCD$ četverokut čiji su vrhovi sjecišta pravaca p i q sa elipsom E. Neka je Y presjek dužina AC i BD. Dokažite da je XY simetrala kuta $\backslash FXG$.*



Zadatak 11. *(2 boda) Neka je $ABCD$ četverokut sa upisanom elipsom E, koja dira stranice AB, BC, CD i DA u točkama P, Q, R i S redom, takva da jedan fokus elipse E leži na pravcu PQ dok drugi fokus leži na pravcu RS. Neka je $E = AB \backslash CD$ i $F = BC \backslash DA$.*

Dokažite da je pravac AC okomit na EF.

GAUSSOVI CIJELI BROJEVI

Autor: Ivan Novak

U ovom problemu, promatrat ćemo skup $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $i^2 = -1$. Te brojeve zovemo Gaussovi cijeli brojevi. Svi dolje navedeni teoremi i leme smiju se koristiti u rješavanju zadataka. Zadatci nisu nužno poredani po težini.

Gaussovi cijeli brojevi mogu se geometrijski interpretirati kao cjelobrojne točke u koordinatnom sustavu (poistovjećujemo $a + bi$ sa (a, b)).

Naravno, kako se radi o podskupu kompleksnih brojeva, znamo ih zbrajati i množiti. Dodavanje broja $a + bi$ nekom broju onda znači pomicanje za a mjesta udesno i za b mjesta prema gore u ravnini. Množenje je malo kompliciranije jer je množenje geometrijski kombinacija rotacije i skaliranja. Na primjer, množenje Gaussovim cijelim brojem i je samo rotacija za 90° suprotno od kazaljke na satu.

Množenje Gaussovim cijelim brojem $a + bi$ možemo onda predočiti tako da prvo zasebno pomnožimo s a (što je skaliranje) i s bi (što je skaliranje i rotacija za 90°), a onda ta dva rezultata zbrojimo.

Definicija 1. *Neka su $a \neq 0$ i b Gaussovi cijeli brojevi. Kažemo da je b djeljiv s a, odnosno da a dijeli b, ako postoji Gaussov cijeli broj x takav da je $b = ax$. To zapisujemo sa $a \mid b$. Ako b nije djeljiv s a, onda pišemo $a \nmid b$. Ako $a \mid b$, onda još kažemo da je a djelitelj od b, a da je b višekratnik od a.*

Višekratnici nekog Gaussovog cijelog broja $a + bi$ mogu se lijepo vizualizirati u ravnini. Naime, promotrimo kvadrat s vrhovima u $(0, 0)$, (a, b), $(-b, a)$ i $(a - b, a + b)$. Zatim zamislimo da smo popločali ravninu kopijama takvih kvadrata. Tada su višekratnici od $a + bi$ točno vrhovi tih kvadrata.

Teorem 1. *(Teorem o dijeljenju s ostatkom) Neka su $a \neq 0$ i b Gaussovi cijeli brojevi. Tada postoje Gaussovi cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, i takvi da je $0 \leq |r| < |a|$.*

Dokaz. *Neka je $b = x + yi$, $a = z + wi$. Tada je*

$$\frac{b}{a} = \frac{(x + yi)(z - wi)}{|a|^2} = \frac{(xz + yw) + (yz - xw)i}{|a|^2}.$$

Po teoremu o dijeljenju s ostatkom u $\mathbb{Z}$, postoje cijeli brojevi k i r takvi da je $(xz + yw) = k|a|^2 + r$, i da vrijedi $|r| \leq |a|^2/2$, te cijeli brojevi j i l takvi da je $(yz - xw) = j|a|^2 + l$, i da vrijedi $|l| \leq |a|^2/2$. Sada smo dobili $\frac{b}{a} = k + ji + \frac{r + li}{|a|^2} \implies b = (k + ji)a + \frac{r + li}{\bar{a}}$. Broj $\frac{r + li}{\bar{a}}$ je Gaussov cijeli broj jer je razlika dva Gaussova cijela broja, i vrijedi

$$\frac{|r + li|}{|\bar{a}|} = \frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{|a|} \leq \frac{\sqrt{|a|^4/2}}{|a|} < |a|.$$

Ono što nam ovaj teorem kaže je da za svaki Gaussov cijeli broj a i za svaki Gaussov cijeli broj b, možemo naći Gaussov cijeli broj r koji je bliži ishodištu nego a takav da je $b - r$ djeljivo s a.

Definicija 2. *Za Gaussov cijeli broj a definiramo normu od a kao $|a|^2$, i pišemo $N(a)$.*

Norma je multiplikativna, tj. $N(ab) = N(a)N(b)$ za sve $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, jer je apsolutna vrijednost $|\ |$ multiplikativna na skupu kompleksnih brojeva. Također, $N(a) \in \mathbb{Z}$ za svaki $a \in \mathbb{Z}[i]$. Jedna od uloga norme je mjerenje veličine Gaussovog cijelog broja, ali zbog svojstva multiplikativnosti norma čuva i neke druge informacije. Na primjer, ako $a \mid b$, onda $N(a) \mid N(b)$.

Zadatak **1.** *(1) Dokaži ili opovrgni: ako za Gaussove cijele brojeve a i b vrijedi da $N(a) \mid N(b)$, onda vrijedi i $a \mid b$.*

Definicija 3. *Za Gaussov cijeli broj x kažemo da je invertibilan (ili jedinica) ako postoji Gaussov cijeli broj y takav da je $xy = 1$. Za dva Gaussova cijela broja x i y kažemo da su asocirani ako postoji invertibilan Gaussov cijeli broj u takav da je $x = yu$. Pišemo $x \sim y$. Skup svih Gaussovih cijelih brojeva asociranih s x zovemo klasa od x i označavamo s $[x]$.*

Lema 1. *Neka je x Gaussov cijeli broj. Tada je skup invertibilnih Gaussovih cijelih brojeva jednak $\{i, -1, -i, 1\}$ i vrijedi $[x] = \{ix, -x, -ix, x\}$.*

Dokaz. *Zbog multiplikativnosti norme i činjenice da je norma uvijek nenegativan cijeli broj, ako je $uv = 1$, onda je $N(u)N(v) = 1$, pa je $N(u) = N(v) = 1$. Lako se vidi da su jedini Gaussovi cijeli brojevi norme 1 upravo $\{i, -1, -i, 1\}$ i da svaki od njih ima inverz.*

U skupu $\mathbb{Z}$, invertibilni elementi su $\{-1, 1\}$, a klasa od x je $\{x, -x\}$. Često poistovjećujemo x i $-x$ u $\mathbb{Z}$, pa preko pojma klase zapravo poistovjećujemo $\{x, ix, -x, -ix\}$. Geometrijski, time dobijemo da je u svakom kvadrantu jedan element svake klase, i da se iz jednog elementa klase do ostalih dolazi rotacijom za 90°, 180° ili 270°.

Zadatak **2.** *(1) Dokaži da je Gaussov cijeli broj a asociran s $\bar{a}$ ako i samo ako je a oblika $x + yi$, gdje su x i y cijeli brojevi takvi da je $(x - y)(x + y)xy = 0$.*

Definicija 4. *Za Gaussov cijeli broj p koji nije invertibilan kažemo da je prost ako za sve $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ takve da $p \mid ab$ i $p \nmid a$ vrijedi $p \mid b$.*

Ova definicija možda se na prvi pogled čini čudna i drugačija od one u skupu cijelih brojeva, međutim može se pokazati da je u slučaju Gaussovih cijelih brojeva ova definicija u skladu s našom intuicijom. Naime, ako je p prost Gaussov cijeli broj, i ako je $p = xy$ za neke x i y, tada je ili x ili y invertibilan. To znači da su svi djelitelji od p brojevi oblika u ili pu, gdje je $u \in \{1, -1, i, -i\}$.

Fiksirajmo sada neki skup $\mathbb{Z}[i]'$ koji sadrži točno po jedan element iz svake klase.

Teorem 2. *Za svaki Gaussov cijeli broj $x \neq 0$ postoji jedinstven invertibilni Gaussov cijeli broj u, jedinstven cijeli broj $k > 0$ i jedinstven skup od k parova $\{(p_1, e_1), \ldots, (p_k, e_k)\}$ gdje su p_i međusobno različiti prosti Gaussovi cijeli brojevi iz $\mathbb{Z}[i]'$, a e_i prirodni brojevi, takvi da vrijedi:*

$$x = up_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k} = u \prod_{j=1}^{k} p_j^{e_j}.$$

Ono što prethodni teorem zapravo kaže je da Gaussovi cijeli brojevi imaju svojstvo jedinstvene faktorizacije (do na poredak i množenje invertibilnim elementima), tj. da za njih vrijedi osnovni teorem aritmetike. Asocirani elementi onda imaju istu prostu faktorizaciju, ali pomnoženu s različitom jedinicom. Intuitivno možemo shvaćati u kao 'predznak'.

Promotrimo sada jedan primjer koji pokazuje moć jedinstvene faktorizacije.

Primjer. *Dokažimo da ne postoji Gaussov cijeli broj x takav da je $x(x+2) = (1+2i)^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.*

Vidimo da je $1+2i$ prost, jer ako $ab = 1+2i$, onda je $N(a)N(b) = N(1+2i) = 5$, pa je ili $N(a) = 1$ ili $N(b) = 1$, odnosno neki od a, b je invertibilan. Zbog svojstva jedinstvene faktorizacije vrijedi da je $x = u(1+2i)^k$ i $x+2 = (1+2i)^{n-k}/u$ za neki invertibilan u i neki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ako je $k > 0$ i $n > 0$, onda je $2 = (1+2i)^{n-k}/u - (1+2i)^k$, pa kako $1+2i$ dijeli desnu stranu, onda dijeli i 2, ali $N(2) = 4$, što nije djeljivo s $N(1+2i) = 5$, pa je to nemoguće. Dakle, ili je $k = 0$ ili je $n - k = 0$.

- *Ako je $k = 0$, onda je $x = u$, $u + 2 = (1+2i)^n/u \implies u^2 + 2u = (1+2i)^n$. Isprobavanjem svih invertibilnih elemenata vidimo da lijeva strana nikad nije djeljiva s $1+2i$, pa u ovom slučaju nema rješenja.*
- *Ako je $n - k = 0$, onda je $x + 2 = 1/u$, $x = u(1+2i)^n \implies u^2(1+2i)^n = 1 - 2u$. Ponovno, uvrštavanjem svih jedinica umjesto u dobijemo da nema rješenja.*

Sljedeći teorem nam daje karakterizaciju skupa prostih Gaussovih cijelih brojeva.

Teorem 3. *Gaussov cijeli broj p je prost ako i samo ako je $N(p)$ prost (u kontekstu prirodnih brojeva) ili je $N(p)$ kvadrat prostog (prirodnog) broja koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4.*

Teorem kaže da se prosti brojevi iz $\mathbb{Z}[i]$ mogu podijeliti na dva dijela: one koji su asocirani s nekim prirodnim prostim brojem oblika $4k+3$ (takve ćemo proste brojeve zvati realnim) i one oblika $a + bi$ gdje su a i b različiti od 0, a $a^2 + b^2$ je prost broj.

Teorem 4. *Svaki prost (prirodan) broj p koji ne daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 može se napisati kao zbroj kvadrata dva cijela broja.*

Iz ova dva teorema vidimo da se prosti (prirodni) brojevi koji nisu oblika $4k+3$ mogu faktorizirati u $\mathbb{Z}[i]$ i da nisu prosti. Naime, ako je $p = a^2 + b^2$, onda je $p = (a+bi)(a-bi)$, pa p nije prost.

Definicija 5. *Neka su a i b Gaussovi cijeli brojevi takvi da je neki od njih različit od 0. Za Gaussov cijeli broj c koji dijeli a i b kažemo da je najveći zajednički djelitelj od a i b ako za svaki $x \in \mathbb{Z}[i]$ koji dijeli a i b vrijedi da $x \mid c$. Kažemo da su a i b relativno prosti ako su jedini brojevi koji dijele i a i b invertibilni.*

Primijetimo da najveći zajednički djelitelj nije jedinstven. Međutim, svi najveći zajednički djelitelji su asocirani:

Lema 2. *Neka su a i b Gaussovi cijeli brojevi takvi da je neki od njih različit od 0. Tada je skup svih najvećih zajedničkih djelitelja od a i b jednak $[x]$ za neki $x \in \mathbb{Z}[i]$. Drugim riječima, postoji jedinstveni $x \in \mathbb{Z}[i]'$ koji je najveći zajednički djelitelj od a i b. Pišemo $[x] = \mathrm{nzd}(a, b)$.*

Dokaz. *Pretpostavimo da su x i x' dva najveća zajednička djelitelja od a i b. Tada po definiciji $x \mid x'$ ali i $x' \mid x$, pa im je norma omjera jednaka 1, odnosno asocirani su.*

Lema 3. *Neka su a i b Gaussovi cijeli brojevi takvi da je barem jedan različit od 0. Neka je c Gaussov cijeli broj. Tada je $\mathrm{nzd}(a, b) = \mathrm{nzd}(a, b - ca)$.*

Ova lema nam omogućava da tražimo najveći zajednički djelitelj kao i u skupu cijelih brojeva. Naime, neka je $N(a) \leq N(b)$. Tada, po teoremu o dijeljenju s ostatkom možemo naći r takav da je $N(r) < N(a)$ i $\text{nzd}(a, b) = \text{nzd}(a, r)$. Taj proces ponavljamo, i kako se nakon svakog koraka zbroj normi brojeva čiji najveći zajednički djelitelj tražimo smanjuje, u nekom trenutku će neki od brojeva postati jednak 0. Kako je $\text{nzd}(x, 0) = [x]$, zaključujemo da ovim postupkom uvijek dolazimo do najvećeg zajedničkog djelitelja.

Zadatak **3.** *(2) Odredi sve parove Gaussovih cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x^2 + x = y^3$.*

Lema 4. *Neka su a i b relativno prosti Gaussovi cijeli brojevi. Tada postoje Gaussovi cijeli brojevi x i y takvi da je $ax + by = 1$.*

Dokaz. *Primijetimo da ako se jedan element klase može zapisati kao $ax + by$ da onda mogu i svi elementi te klase.*

Neka je r neki po normi najmanji nenul Gaussov cijeli broj koji se može zapisati kao $ax + by$ za neke x i y. Ako r ne dijeli b, onda je $b = kr + l$, gdje je $N(l) < N(r)$. Međutim, $l = b - kr = b - kax - kby$, odnosno l se može isto zapisati u tom obliku. Kako je r bio minimalne norme, dobili smo kontradikciju.

Dakle, $r \mid b$ i analogno, $r \mid a$. Iz toga slijedi da $r \mid 1$, jer je 1 najveći zajednički djelitelj od a i b, pa je r invertibilan, što dokazuje lemu.

Definicija 6. *Neka je $x \neq 0$ Gaussov cijeli broj. Kažemo da su Gaussovi cijeli brojevi a i b kongruentni modulo x ako $x \mid a - b$. Pišemo $a \equiv b \pmod{x}$.*

Lako je provjeriti da se kongruencije dobro ponašaju s obzirom na zbrajanje i množenje; ako je $a \equiv b \pmod{x}$ i $c \equiv d \pmod{x}$, onda je $ac \equiv bd \pmod{x}$ i $a + c \equiv b + d \pmod{x}$, a prethodna lema nam omogućuje da za y relativno prost s x nađemo z takav da je $yz \equiv 1 \pmod{x}$.

Preko kongruencija modulo x poistovjećujemo one Gaussove cijele brojeve kojima je razlika višekratnik od x.

Definicija 7. *Neka je $x \neq 0$ Gaussov cijeli broj. Za skup Gaussovih cijelih brojeva P kažemo da je potpun sustav ostataka modulo x ako za svaki Gaussov cijeli broj t postoji jedinstven element skupa P kongruentan s t modulo x. Za skup Gaussovih cijelih brojeva R kažemo da je reducirani sustav ostataka modulo x ako su svi elementi skupa R relativno prosti s x i ako za svaki Gaussov cijeli broj t relativno prost s x postoji jedinstven element skupa R kongruentan s x.*

Geometrijski, jedan potpun sustav ostataka modulo $a + bi$ gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ je skup svih točaka potpuno unutar kvadrata s vrhovima u $(0, 0)$, (a, b), $(-b, a)$ i $(a - b, a + b)$, kojima još dodamo vrh $(0, 0)$ i točke na onim stranicama kvadrata koje se sijeku u $(0, 0)$. Reducirani sustav ostataka dobijemo tako da iz potpunog sustava ostataka maknemo sve one brojeve koji nisu relativno prosti s $a + bi$.

Od sada nadalje, s $n(x)$ označavat ćemo broj elemenata u potpunom sustavu ostataka modulo x, a s $f(x)$ broj elemenata u reduciranom sustavu ostataka modulo x.

Zadatak **4.** *(2) Dokaži da je $n(x) = N(x)$ za svaki Gaussov cijeli broj x. Možda će vam pomoći Pickov teorem.*

Zadatak **5.** *(2) Neka je p prost broj neparne norme. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_{\frac{n(p)-1}{2}}\}$ skup Gaussovih cijelih brojeva sa svojstvom da zbroj nikoja dva nije djeljiv s p, i da razlika nikoja dva različita nije djeljiva s p. Neka je b Gaussov cijeli broj relativno prost s p. Neka je r broj indekasa $k \in \{1, \ldots, \frac{n(p)-1}{2}\}$ takvih da $a_k b - a_j$ nije djeljivo s p ni za koji $j \in \{1, \ldots, \frac{n(p)-1}{2}\}$. Dokaži da $p \mid b^{\frac{n(p)-1}{2}} - (-1)^r$.*

Definicija 8. *Neka su a i $b \neq 0$ relativno prosti Gaussovi cijeli brojevi. Definiramo red od a modulo b kao najmanji prirodan broj n takav da $b \mid a^n - 1$. Pišemo $n = \text{ord}_b(a)$.*

Teorem 5. *Neka su a i $b \neq 0$ relativno prosti Gaussovi cijeli brojevi. Tada $b \mid a^{\varphi(b)} - 1$. Nadalje, $\mathrm{ord}_b(a) \mid \varphi(b)$.*

Kongruencije se lijepo ponašaju pod potenciranjem. Naime, ako su a i b relativno prosti, onda je $a^x \equiv a^{x+\mathrm{ord}_b(a)} \pmod{b}$. Stoga, kad provjeravamo koje sve ostatke a^x može davati pri dijeljenju s b, dovoljno je isprobati a, a^2, …, i tako dalje, sve dok ne dođemo do k takvog da $a^k \equiv 1 \pmod{b}$.

Zadatak **6.** *(2) Neka su m i n prirodni brojevi. Odredi minimum izraza*

$$|(1+i)^n - (3+2i)^m|.$$

Teorem 6. *Neka je p prost Gaussov cijeli broj. Tada postoji Gaussov cijeli broj g relativno prost s p za koji vrijedi $\mathrm{ord}_p(g) = \varphi(p) = n(p) - 1$. Za takav g (koji zovemo primitivni korijen modulo p) vrijedi da je skup $\{1, g, g^2, \ldots, g^{\varphi(p)-1}\}$ reducirani sustav ostataka modulo p.*

Ovaj teorem nam kaže da u reduciranom sustavu ostataka postoji broj g preko kojeg potenciranjem možemo doći do svih ostalih elemenata. Nije jednostavno pronaći taj g, ali često i sama činjenica da postoji može biti jako korisna.

Zadatak **7.** *(2) Neka je $\{a_1, \ldots, a_{\varphi(p)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo p, gdje je p prost Gaussov cijeli broj. Dokaži da p dijeli broj*

$$1 + \prod_{i=1}^{\varphi(p)} a_i = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(p)}.$$

Zadatak **8.** *(2) Odredi sve proste Gaussove cijele brojeve p takve da za svaki cijeli broj n postoji Gaussov cijeli broj x za koji vrijedi*

$$p \mid x^2 - n.$$

Teorem 7. *Neka su $x_1, \ldots, x_k$ u parovima relativno prosti Gaussovi cijeli brojevi i $a_1, \ldots, a_k$ Gaussovi cijeli brojevi. Tada postoji beskonačno Gaussovih cijelih brojeva x sa svojstvom da $x_i \mid x - a_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nadalje, ako je x neki broj s tim svojstvom, onda to svojstvo ima i svaki y oblika $x + zx_1x_2\ldots x_k$ za neki $z \in \mathbb{Z}[i]$.*

Ovaj teorem zove se *kineski teorem o ostatcima*, a neformalno kaže da ako su x i y relativno prosti, onda ostatak koji neki broj daje s x ne ovisi o ostatku koji taj broj daje s y.

Zadatak **9.** *(2) Dokaži da za svaki pozitivan realan broj r postoji Gaussov cijeli broj z takav da za svaki Gaussov cijeli broj x koji zadovoljava nejednadžbu $|x - z| < r$ vrijedi da x ima barem 10000 djelitelja.*

Zadatak **10.** *(2) Odredi sve Gaussove cijele brojeve x za koje postoje Gaussovi cijeli brojevi a i b takvi da je $x = a^2 + b^2$.*

Zadatak **11.** *(2) Neka je r pozitivan realan broj i neka je p prost Gaussov cijeli broj. Označimo sa $g(r)$ umnožak svih ne-nul Gaussovih cijelih brojeva čija je norma manja od r. Posebno, za $r \leq 1$ definiramo $g(r) = 1$. Neka $n_p(g(r))$ označava najveći cijeli broj $n > 0$ takav da $p^n \mid g(r)$. Dokaži da vrijedi*

$$n_p(g(r)) < \frac{4r}{N(p) - 1} + \frac{4\sqrt{r}}{\sqrt{N(p)} - 1}.$$

RACIONALNE TOČKE NA KRIVULJAMA

Autor: Daniel Širola

Uvod

U ovom zadatku cilj je proučiti neke osnovne krivulje u ravnini i točke s racionalnim koordinatama na racionalnim krivuljama. Prvo definirajmo osnovne pojmove koje ćemo koristiti.

Definicija 1. **Polinom u dvije varijable** stupnja manjeg ili jednakog 2 je funkcija $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$p(x,y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{10}x + a_{02}y^2 + x_{01}y + a_{00} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

gdje su $a_{20}, a_{11}, a_{10}, a_{02}, a_{01}, a_{00} \in \mathbb{R}$ neki realni koeficijenti. Skup svih takvih polinoma u dvije varijable ćemo označavati sa P^2.

Pošto polinom u dvije varijable prima uređeni par realnih brojeva, javlja se ideja geometrijskog skiciranja vrijednosti tog polinoma. Konkrentno, pročavat ćemo skupove nultočaka tog polinoma.

Definicija 2. Za skup $S_p \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kažemo da je **skup nultočaka** polinoma p ako je

$$p(x,y) = 0 \iff (x,y) \in S_p$$

Za skup S_p koji je skup nultočaka polinoma p kažemo da ima jednadžbu

$$p(x,y) = 0$$

Navedimo nekoliko primjera takvih skupova.

Primjer 1. *Dani su polinomi*

$$p(x,y) = x^2 + y^2$$

$$q(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

$$r(x,y) = x + y - 2$$

Za skup nultočaka polinoma p vrijedi

$$(x,y) \in S_p \iff x^2 + y^2 = 0$$

Pošto znamo da je $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ pošto su $x,y \in \mathbb{R}$, mora biti $x = y = 0$, pa je $S_p = \{(0,0)\}$.

Skup S_q je skup koji ima jednadžbu

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

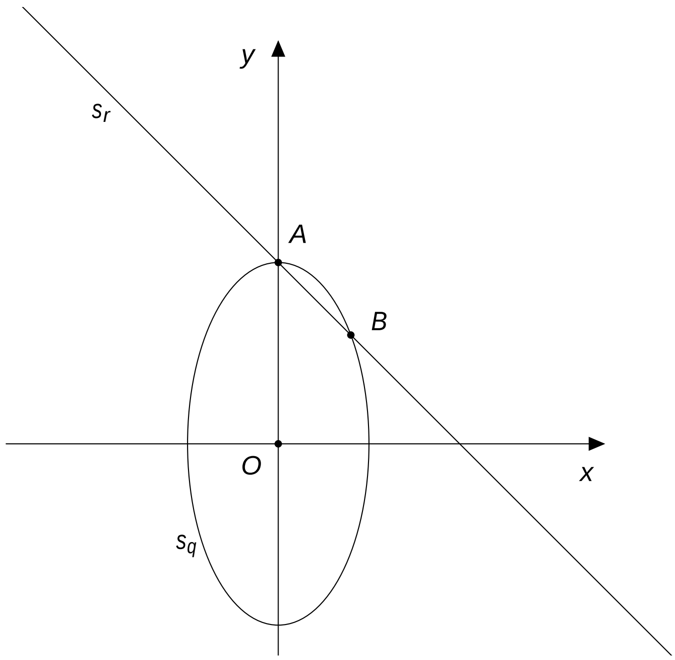
$$\iff x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Sada prepoznajemo jednadžbu elipse, što znači da je S_q skup svih točaka elipse s tom jednadžbom.

Za skup S_r vrijedi

$$(x,y) \in S_r \iff x + y - 2 = 0 \iff y = -x + 2$$

u tom skupu prepoznajemo pravac s tom jednadžbom.



Sa skice možemo uočiti da postoje točke $A(x_a, y_a)$ i $B(x_b, y_b)$ u kojima se sijeku elipsa i pravac. Tada vrijedi $A, B \in S_q$ i $A, B \in S_r$. Tada vrijede jednakosti:

$$x_a^2 + \frac{y_a^2}{4} = 1$$

$$y_a = -x_a + 2$$

$$x_b^2 + \frac{y_b^2}{4} = 1$$

$$y_b = -x_b + 2$$

To znači da su (x_a, y_a) i (x_b, y_b) rješenja sustava jednadžbi

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y = -x + 2$$

Zadatak 1. *(1 bod) Odredite sva rješenja sustava*

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$
$$x + y - 2 = 0$$

Racionalne točke na elipsama

U ovom odjeljku bavit ćemo se traženjem točaka na kružnici koje imaju obje koordinate racionalne.

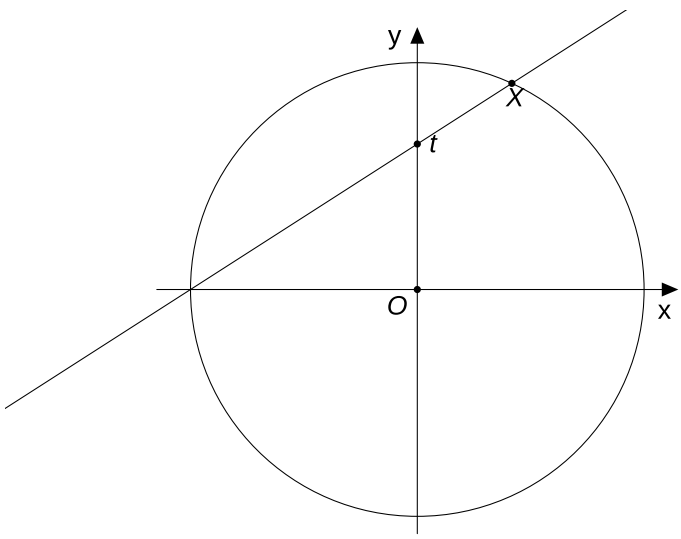
Definicija 3. Skup S_p nultočaka polinoma

$$p(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

zovemo **jedinična kružnica**.

Neka je sada $t \in \mathbb{R}$ neki realni broj. Povucimo pravac koji prolazi točkama $(-1, 0)$ i $(0, t)$.

Definicija 4. **Racionalna točka** je točka čije su obje koordinate racionalni brojevi.



Zadatak 2. *(1 bod) Dokažite da pravac kroz $(-1, 0)$ i $(0, t)$ siječe kružnicu u točkama s racionalnim koordinatama ako i samo ako je $t \in \mathbb{Q}$.*

Zadatak 3. *(1 bod) Neka su $k, l \in \mathbb{Q}$ takvi da je $-1 < l < 1$. Dokažite da pravac S_p jednadžbe*

$$p(x, y) = y - kx - l$$

siječe jediničnu kružnicu ili u dvije racionalne točke ili u dvije točke koje nisu racionalne.

Proširenja polja

Sada ćemo učiniti digresiju na neka svojstva racionalnih brojeva koja će nam omogućiti da proširimo naša razmatranja na kružnici.

Definicija 5. Uređenu trojku $(F, +, \cdot)$ zovemo **polje** ako vrijedi sve od navedenog:

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in F\\
&x+y = y+x \quad \forall x,y \in F\\
&\exists e_+ \in F : e_+ + x = x + e_+ = x \quad \forall x \in F\\
&\forall x \in F\ \exists y \in F : x+y = y+x = e_+\\
&(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in F\\
&xy = yx \quad \forall x,y \in F\\
&\exists e_\cdot \in F : e_\cdot x = x e_\cdot \quad \forall x \in F\\
&\forall x \in F \setminus \{e_+\}\ \exists y \in F : xy = yx = e_\cdot \quad a(b+c) = (ab)+(ac) \quad \forall a,b,c \in F
\end{aligned}
$$

Brojeve $e_+, e_\cdot$ nazivamo neutralnim elementima s obzirom na zbrajanje i množenje redom. Ubuduće ćemo, bez obzira o kojem se polju radilo označavati $e_\cdot = 1$, $e_+ = 0$ i zvati ih, redom, jedinica i nula.

Zadatak 4. *(0 bodova) Dokažite da ne mogu postojati dvije vrijednosti $e \neq f \in F$ takve da je*

$$e + x = x + e = x \quad \forall x \in F$$

$$f + x = x + f = x \quad \forall x \in F$$

Dokažite analogno i za neutralni element s obzirom na množenje.

Sada navedimo neke osnovne primjere polja. Prvi i najjednostavniji primjer je skup realnih brojeva sa kojima ste zasigurno već upoznati i poznato vam je da vrijede sve navedene tvrdnje iz prethodne definicije za standardne operacije zbrajanja i množenja.

Nadalje i $\mathbb{Q}$, skup racionalnih brojeva, je s operacijama zbrajanja i množenja također polje, pošto vrijede sve potrebne tvrdnje.

Primjer 2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *nije polje.*

Iako prve četiri tvrdnje iz prethodne definicije vrijede, ne postoji *inverz s obzirom na množenje* za svaki cijeli broj. Odnosno, za primjerice 2 ne postoji $x \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$2x = 1$$

Iako u cijelim brojevima takva jednadžba nema rješenja, možemo definirati relativno "bliske" skupove koji zaista jesu polja.

Primjer 3. *Neka je dan skup $S = \{0,1,2,3,4\}$. Imamo operaciju modularnog zbrajanja $\oplus : S \times S \to S$ za koju vrijedi da, ako su $a,b,m \in S$, onda*

$$a \oplus b = m \iff 5 \mid a + b - m$$

Operacija modularnog množenja $\otimes : S \times S \to S$ slično funkcionira.

$$a \otimes b = m \iff 5 \mid a \cdot b - m \quad a,b,m \in S$$

U ovom se primjeru zapravo radi o zbrajanju i množenju ostataka pri dijeljenju s 5. Prethodna struktura uistinu jest polje. 0 je neutralni element za zbrajanje, dok je 1 neutralni element za množenje. Svojstva asocijativnost, distributivnost i komutativnost trivijalno vrijede kao posljedica činjenice da su te operacije izvedene iz "običnog" množenja i dijeljenja. Sve ostale tvrdnje su relativno očite, preostaje pokazati postojanje inverza. Lako se vidi da za i 2 $f1, 2, 3, 4g$ vrijedi $i \quad (5 \quad i) = 0$, odnosno $5 \quad i$ je inverz od i. Nula je naravno sama sebi inverz na zbrajanje. Iako na prvi pogled možda nije očito, svaki element osim nule ima i inverz na množenje. Vrijedi

$$1 \quad 1 = 1$$

$$2 \quad 3 = 1$$

$$4 \quad 4 = 1$$

Zadatak 5. *(1 bod) Neka je p prost broj. Dokažite da je skup $f0, 1, 2, 3 \ldots, p \quad 2, p \quad 1g$ s operacijama modularnog zbrajanja i množenja s obzirom na p (sve kao u prehodnom primjeru, samo stoji p umjesto 5) polje.*

Definicija 6. Neka su dani skupovi $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ tako da su oni polja s obzirom na iste operacije. Kada je $\mathbb{K} \quad \mathbb{L}$ kažemo da je $\mathbb{K}$ **potpolje** od $\mathbb{L}$ ili da je $\mathbb{L}$ **proširenje polja** $\mathbb{K}$.

Primjer 4. *Jedan osnovni primjer su polja $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Vrijedi da je $\mathbb{R}$ proširenje polja $\mathbb{Q}$.*

Ipak, polje ostataka pri dijeljenju s p iz prethodnog zadatka nije potpolje od recimo $\mathbb{Q}$ jer nije definirano s istim operacijama. Štoviše, modularno množenje uopće nema smisla na $\mathbb{Q}$.

Primjer 5. *Skup*

$$\mathbb{Q}[i] := fa + bi : \ a, b \ 2 \ \mathbb{Q}g$$

uz operacije zbrajanja i množenja je polje i to proširenje polja racionalnih brojeva.

*Skup $\mathbb{Q}[i]$ se naziva skupom **Gaussovih racionalnih brojeva**.*

Sada uvodimo još jedan tip polja koji će nam biti zanimljiv za daljnja razmatranja jer ćemo pokušati uočiti što se dešava kada proširimo polje $\mathbb{Q}$ i gledamo pravce koji sijeku elipse tražeći točke s koordinatama u tom novom polju.

Definicija 7. Neka je p neki prost broj. Skup

$$\mathbb{Q}[{}^{p}\overline{p}] := fa + b^{p}\overline{p} : \quad a, b \ 2 \ \mathbb{Q}g$$

nazivamo **kvadratnim proširenjem polja** racionalnih brojeva korijenom iz p.

Zadatak 6. *Dokažite sljedeće tvrdnje:*

1. $a + b^{p}\overline{p} \ 2 \ \mathbb{Q} \quad (\,) \quad b = 0$ *(1 bod)*
2. $\mathbb{Q}[{}^{p}\overline{p}]$ *je polje. (1 bod)*

Sada se postavlja pitanje možemo li promatrati točke na elipsi koje više nisu samo racionalne, već se nalaze u skupu $\mathbb{Q}[{}^{p}\overline{p}]$.

Zadatak 7. *(2 boda) Neka je dana elipsa* S_p *polinomom* $p(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, *tako da su* $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \setminus \{0\}$. *Dokažite da, ako i samo ako je* $t \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, *onda pravac kroz* $(-a, 0)$ *i* $(0, t)$ *prolazi još jednom točkom* (x, y) *takvom da je* $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$

Sada uvedimo skup

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}] := \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

Zadatak 8. *(3 boda) Dokažite da je* $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}]$ *polje.*

Zadatak 9. *(2 boda) Dokažite da za* $x = a_x + b_x\sqrt[3]{p} + c_x\sqrt[3]{p^2}$ *i* $y = a_y + b_y\sqrt[3]{p} + c_y\sqrt[3]{p^2}$ *vrijedi*

$$x = y \iff a_x = a_y,\ b_x = b_y,\ c_x = c_y$$

Prethodni zadatak zapravo tvrdi da se svaki element tog polja može jedinstveno zapisati pomoću koeficijenata uz 1, $\sqrt[3]{p}$ i $\sqrt[3]{p^2}$. Intuicija kaže da ćemo moći tako slično konstruirati polja pomoću bilo kojeg koraka. Intuicija se pokazuje istinitom.

Zadnji zadatak konačno pokazuje kako ćemo strukturno razlikovati polja $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}]$ i $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

Zadatak 10. *(2 boda) Dokažite da ne postoji bijekcija* $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ *takva da vrijedi:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}]$$

$$f(ax) = af(x) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}], \forall a \in \mathbb{Q}$$

Polinomi

Kako bismo zaključili svoja razmatranja preostaje nam proučiti neka osnovna svojstva polinoma sa koeficijentima u polju racionalnih brojeva. Skup takvih polinoma označavat ćemo s

$$\mathbb{Q}[x]$$

dok će nam skup polinoma stupnja manjeg ili jednakog $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ biti

$$P_k := \{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 : a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{Q}\}$$

Bitna napomena jest da vrijednost pored najviše potencije varijable u polinomu nazivamo **vodeći koeficijent**, a vrijednost pored koje se ne pojavljuje varijabla, odnosno pojavljuje se na nultu potenciju, nazivamo **slobodni član**. Dakle u polinomu

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

vrijednost a_k je vodeći koeficijent, dok je a_0 slobodni koeficijent. Također, ponekad cijeli $a_k x^k$ nazivamo vodećim članom, dok je isto tako $a_0 x^0 = a_0$ slobodni član.

Primjer 6. *Svaki polinom kojemu su vodeći koeficijent i sve nultočke racionalne ima i sve ostale koeficijente racionalne. Obrat ne vrijedi.*

Zapišimo onda polinom kao

$$P(X) = a_k(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)$$

jasno je da ćemo množenjem dobiti isključivo racionalne koeficijente, pošto su svi x_i racionalni. Obrat je vrlo jednostavno pokazati da ne vrijedi. Naime, $x^2 - 2$ ima racionalne koeficijente, no očito nije $x = \sqrt{2}$ racionalan broj. Polinome možemo zbrajati i množiti kako ste, pretpostavljam, naučili u školi. Također, važno je uočiti da zbrajanjem i množenjem dva polinoma s racionalnim koeficijentima ponovo dobivamo polinom s racionalnim koeficijentima. Sada ćemo pokušati okarakterizirati detaljnije malo skup polinoma.

Zadatak 11. *(1 bod) Odredite sve skupove $S \subseteq \mathbb{Q}[x]$ takve da vrijedi sljedeće:*

1. $x^2 - 3x + 2 \in S$
2. $P, Q \in S \implies P + Q \in S \quad P \in S, R \in \mathbb{Q}[x] \implies PR \in S$
3. *Ako postoje polinomi $A, B \in \mathbb{Q}[x]$ takvi da je $P = AB \in S$, te ako $A \notin S$ onda mora biti $B \in S$*

Sada ćemo definirati određene podskupove skupa $\mathbb{Q}[x]$ koji će nam pomoći u našim razmatranjima. Neka je dan skup $B \subseteq \mathbb{Q}$ koji ima konačno mnogo elemenata. Sada neka je

$$S(B) := \{P \in \mathbb{Q}[x] : p(b) = 0\ \forall b \in B\}$$

te ćemo za taj skup reći da je generiran skupom B.

Uzimat ćemo da je po definiciji $S(\emptyset) := \mathbb{Q}[x]$

Zadatak 12. *(1 bod) Neka je $P \in \mathbb{Q}[x]$ polinom n tog stupnja za neki prirodni broj n. Odredite maksimalan broj konačnih skupova $B \subseteq \mathbb{Q}$ takvih da je*

$$P \in S(B)$$

Zadatak 13. *(3 boda) Neka je dan polinom $P \in S(\{0\})$ drugog stupnja pozitivnog vodećeg koeficijenta različit od x^2, te neka mu je $A(a_x, a_y)$ tjeme (minimum). Sada neka su dane točke $B(a_x, 0)$ i $C(0, -\frac{1}{2})$. Konstruirajmo kvadrate $ABED$, $BCGF$ i $ACHI$ s vanjske strane trokuta $\triangle ABC$. Pronađite sve polinome P takve da su E, D, G, F, H, I konciklične.*